Warum steht M für 1000?

Lateinische Texte zur Frühgeschichte der Mathematik

übersetzt und kommentiert von

Prof. Mag. Walter Freinbichler

BRAUMÜLLER

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

In einer Zeit, in der der Wert des Faches Latein im Kanon der Gegenstände, die an einer AHS unterrichtet werden, immer stärker in Frage gestellt wird, ist es notwendig, die lateinische Sprache als Medium zu begreifen, durch das Inhalte verschiedenster Kategorien vermittelt werden. Es muss klar werden, dass ohne Kenntnis des Mediums ein Verständnis der Inhalte nicht möglich ist.

Diese Erkenntnis hat sich in den letzten Jahren soweit durchgesetzt, dass auch im Lateinunterricht immer mehr der Fachliteratur zuzurechnende Texte Berücksichtigung finden. Es gibt heute kaum mehr einen AHS-Absolventen, der nicht mit römischem Recht in Berührung gekommen wäre. Aber auch Autoren wie Plinius maior, Vitruv, Celsus und andere nehmen vermehrt Platz auf den Bänken, die bisher einem Cicero oder Vergil vorbehalten waren.

Es kann nicht mehr Aufgabe der Schule sein, vordringlich die Eigenart und Schönheit der lateinischen Sprache zu vermitteln. In einer Zeit, in der alles nach seiner Nützlichkeit bewertet wird, wird Sprache überwiegend als Mittel zur Verständigung aufgefasst. Und dem Fach Latein kommt dabei ein wesentlicher Platz zu. Wenn man bedenkt, dass Latein beinahe 2000 Jahre lang die *lingua franca* der Wissenschaft war, dass sämtliche Erkenntnisse, die in Europa gewonnen wurden, in lateinischer Sprache publiziert wurden, kommt ein In-Frage-Stellen des Lateinunterrichtes fast einem Zurückfallen in den Analphabetismus gleich.

Ziel dieses Skriptums ist es daher, Latein anhand ausgewählter Texte als Sprache der Wissenschaft, speziell der Mathematik bekannt zu machen. Es soll deutlich gemacht werden, wie schwer es war, eine verbindliche Fachterminologie der Mathematik zu entwickeln; es soll gezeigt werden, wie sich römisches Selbstverständnis auch in den Inhalten wissenschaftlicher Texte manifestiert und es soll schließlich einsichtig werden, dass die Mathematik eine Geschichte hat und dass man so manches mathematische Problem schon vor 2000 Jahren zu beantworten versuchte. Dieses Skriptum soll auch im Mathematikunterricht einsetzbar sein. Um allfällige sprachliche Barrieren zu beseitigen, wird daher allen Originaltexten eine deutsche Übersetzung beigestellt; dabei war es oft notwendig, die Syntax des Originals aufzugeben, um die Inhalte der Texte verständlich zu machen. Textkritische Editionen sind meines Wissens nicht von allen Texten vorhanden. Soweit es möglich war, habe ich diese herangezogen. Die Auswahl der Texte wurde nach zwei Gesichtspunkten getroffen: Sie sollten interessant sein bezüglich der Fragestellungen, die sich aus ihnen ergeben, sie sollten aber auch auf Grund ihrer Länge ihrer Funktion als Impulstexte gerecht werden. Auf Textkürzungen wurde dabei bewusst verzichtet, da das Kennenlernen des Originaltextes in seiner Gesamtheit zu den Zielsetzungen dieser Arbeit gehört.

Der Beitrag Roms zur Entwicklung der Mathematik (Text 1, Text 2)

Liest man die Werke eines **Euklid**, eines **Apollonius** oder eines **Archimedes**, so ist man fasziniert von der Präzision des Denkens, des Fragens, des Suchens und des Erkennens, die diesen genialen Wissenschaftlern zu Eigen war. Wie aktuell diese Werke bis heute sind, kann man daran erkennen, dass fast alle Gebiete, die heute an der Schule im Mathematikunterricht behandelt werden, in diesen Schriften bereits angedacht und zum Teil ausformuliert wurden. Dabei ist zu bedenken, dass nur ein Bruchteil des antiken Schrifttums erhalten ist und unsere Kenntnis des damaligen Wissens mehr als lückenhaft ist.

In dem Buch *Die großen Mathematiker* von **E.T. Bell** (Düsseldorf, Wien 1967) folgt auf **Archimedes** (287–212 v.Chr.) **René Descartes** (1596–1650). Dazwischen liegen 1800 Jahre ohne „große Mathematiker". Auch andere Monographien bestätigen den Eindruck, dass – zumindest in Westeuropa – die Fortschritte in der Mathematik in diesen Jahrhunderten mehr als bescheiden waren. Und irgendwo stand geschrieben, dass der einzige Beitrag, den Rom zur Geschichte der Mathematik geleistet hat, der war, dass ein römischer Soldat Archimedes erschlagen hat.

TEXT 1 Valerius Maximus: facta et dicta memorabilia VIII 7 Ext.

Archimedis quoque fructuosam industriam fuisse dicerem, nisi eadem illi et dedisset vitam et abstulisset: captis enim Syracusis Marcellus, etsi machinationibus eius multum ac diu victoriam suam inhibitam senserat, eximia tamen hominis prudentia delectatus ut capiti illius parceretur edixit, paene tantum gloriae in Archimede servato quantum in oppressis Syracusis reponens. at is, dum animo et oculis in terra defixis formas describit, militi, qui praedandi gratia domum inruperat strictoque super caput gladio quisnam esset interrogabat, propter nimiam cupiditatem investigandi quod requirebat nomen suum indicare non potuit, sed protecto manibus pulvere ‚noli' inquit, ‚obsecro, istum disturbare', ac perinde quasi neglegens imperii victoris obtruncatus sanguine suo artis suae liniamenta confudit. quo accidit ut propter idem studium modo donaretur vita, modo spoliaretur.

Ich könnte auch sagen, dass die Schaffenskraft des Archimedes Erfolge gezeitigt hat, wenn dieselbe jenem das Leben gegeben und nicht auch genommen hätte. Nach der Einnahme von Syrakus bestimmte nämlich Marcellus, das Leben jenes Mannes zu schonen, da er von dessen außerordentlicher Klugheit begeistert war, obwohl er erkannt hatte, dass sein Sieg durch dessen kunstvolle Apparate lange und nachhaltig verzögert worden war und weil er sich beinahe ebensoviel Ruhm von der Rettung des Archimedes wie von der Eroberung von Syrakus erwartete. Doch als dieser voller Konzentration mit zu Boden gewandten Augen Konstruktionen im Sand ausführte, konnte er einem Soldaten, der um Beute zu machen in sein Haus eingedrungen war und über seinem Haupt das Schwert gezogen hatte, auf dessen Frage, wer er denn sei, seinen Namen nicht sagen, da er intensiv mit der Lösung eines Problems beschäftigt war. Er sagte nur „ich beschwöre dich, zerstöre jene nicht", wobei er die Sandfläche mit den Händen schützte, und wurde, da er gewissermaßen dem Befehl des Siegers nicht nachgekommen war, erschlagen. Mit seinem Blut verwischte er die Linien seiner kunstvollen Zeichnung. So kam es, dass ihm wegen desselben wissenschaftlichen Eifers das Leben zuerst gegeben und dann genommen wurde

In der Tat sind Fortschritte in der theoretischen Mathematik bei den Römern nicht zu finden. Das hat mehrere Gründe. So sagt **Cicero** stellvertretend für die Mehrheit der Römer (*Tusc.disp*. I 4 f.)

ergo in Graecia musici floruerunt, discebantque id omnes, nec, qui nesciebat, satis excultus doctrina putabatur. In summo apud illos honore geometria fuit, itaque nihil mathematicis illustrius; at nos metiendi ratiocinandique utilitate huius artis terminavimus modum.

„Daher standen in Griechenland die Musiker in hohem Ansehen, und niemand galt für ausreichend gebildet, der nicht musikalische Grundkenntnisse hatte. Bei jenen erfuhr auch die Geometrie höchste Wertschätzung, niemand war demnach angesehener als ein Mathematiker; wir aber haben diese Wissenschaft auf die Zweckmäßigkeit des Messens und Rechnens beschränkt."

Arithmetik und Geometrie waren für den Römer auf ihre praktische Verwertbarkeit reduziert. Sich als Erwachsener mit diesen Wissenschaften zu beschäftigen, galt als unschicklich. Obgleich sich Cicero als gebildeter Römer seiner Abhängigkeit von den Griechen, was Philosophie, Rhetorik oder Literatur betraf, durchaus bewusst war, so lässt er dennoch Scipio in seinem Werk über den Staat sagen (*rep*. I 30):

Quodsi studia Graecorum vos tanto opere delectant, sunt alia liberiora et transfusa latius, quae vel ad usum vitae vel etiam ad ipsam rem publicam conferre possumus. Istae quidem artes, si modo aliquid valent, ‚id valent', ut paulum acuant et tamquam irritent ingenia puerorum, quo facilius possint maiora discere.

„Wenn ihr ein solches Gefallen an den Studien der Griechen habt, so gibt es doch noch andere, die einen größeren Spielraum und ein weiteres Feld der Betätigung bieten, die wir für das praktische Leben oder sogar gerade für den Staat verwenden können. Wenn diese Wissenschaft überhaupt einen Wert hat, so doch nur den, dass sie die Verstandeskraft der jungen Leute ein wenig schärft und ihr gleichsam einen Anreiz bietet, damit sie das Wichtigere um so leichter lernen können."

Fasst man zusammen, so bedeutete Mathematik für den Römer in erster Linie elementares Rechnen, das jeder Knabe ebenso wie Lesen und Schreiben in der Elementarschule zu lernen hatte; der Wert eines höheren Bildungsgutes, mit dem man sich auch noch als Erwachsener beschäftigte, wurde dieser *ars* im Allgemeinen abgesprochen.

Tod des Archimedes. Kopie eines römischen Mosaiks (15. Jh.) Städtisches Kunstinstitut, Frankfurt.

Als einige Jahrhunderte später das Christentum immer weitere Schichten der römischen Gesellschaft erfasste, wurden auch die Bildungsziele der römischen Schule einer kritischen Bewertung unterzogen. Die christlichen Apologeten der ersten Jahrhunderte lehnten alle Bildungsgüter ab, die nicht durch das Neue Testament ihre Rechtfertigung erfuhren. Für **Tertullian** (~160 – ~220 n.Chr.) stand der christliche Glaube in schroffem Gegensatz zu den heidnischen Elementen der antiken Bildung, die Mathematik hielt er für „Torheit vor Gott“ (vgl. *de idololatria* c. 10 f.). Noch im 6. Jahrhundert wetterte der Mönch **Kosmas Indikopleustes** in seinem Werk Χριστιανικὴ τοπογραφία:

„Wer ein wahrer Christ sein will, der muss die geometrischen Methoden dieser Toren und Lügenschmiede fahren lassen. Zu denen, welche Christen sein wollen, und doch Gottes Wort gering schätzend die Erde für eine Kugel halten, wird Gott am Tage des Gerichts nach dem Apostel Matthäus sagen: ‚Ich kenne euch nicht, weicht von mir, die ihr Unrecht treibt‘.“

Diese Einstellung zu den Naturwissenschaften änderte sich erst, als das gesamte Bildungsgut in christlichem Sinn neu formuliert war und *das Wissen vom Göttlichen für einen mathematisch ganz Ungebildeten unerreichbar erschien* (**Nikolaus von Cues**). Das ist eine andere Sprache als die der Kirchenväter, aber sie wurde erst im hohen Mittelalter verstanden.

Es verwundert daher nicht, dass lateinisch geschriebene Werke mathematischen Inhalts erst aus der Spätantike und dem Mittelalter bekannt sind. Zu erwähnen sind vor allem *de nuptiis Philologiae et Mercurii* des **Martianus Capella** (5. Jh.n.Chr.), eine Enzyklopädie der sieben *artes liberales*, *de institutione arithmetica* des **A. Manlius Boethius** (~ 480–524 n.Chr.), *de artibus ac disciplinis liberalium artium* des **Flavius Aurelius Cassiodorus** (~485 – ~580), sowie die *origines* des **Isidoros von Sevilla** († 636 n.Chr.). Verloren sind die *disciplinae* (9 Bücher) des **M. Terentius Varro** (116–27 v.Chr.), von denen Buch 5 die Arithmetik und Buch 6 die Geometrie behandelten. Mathematisch am interessantesten sind *opuscula*, die im ***corpus agrimensorum*** enthalten sind. Diese „Schriften der Feldmesser“ spiegeln das Verständnis der Römer von Mathematik am besten wieder. Andererseits zeigen diese Schriften auch die starke Abhängigkeit der römischen Rechenmeister von griechischen Mathematikern, allen voran von **Heron v. Alexandrien** (1. Jh.n.Chr.).

Dass sich die Bedeutung Roms für die Entwicklung der Mathematik nicht auf die Ermordung des Archimedes beschränkt, dass die Römer im Gegenteil wesentlich das naturwissenschaftliche Denken des Abendlandes geprägt haben, das werden die folgenden Texte zeigen. Als die Römer ihr Interesse der Mathematik zuwandten, da lag der Höhepunkt griechischer Mathematik bereits mehrere Jahrhunderte zurück. Ihr großes Verdienst liegt darin, die Bedeutung der Mathematik für eine umfassende Bildung erkannt und die Arithmetik und Geometrie gleichberechtigt neben Musik, Astronomie, Physik, Logik und Ethik zu den *septem artes liberales*, den sieben freien Künsten gezählt zu haben, die im Mittelalter das universitäre Bildungsgut repräsentierten.

Reisch Gregor: *Margarita philosophica*. Titelbild zu Buch I ***Grammatik***. Freiburg. 1503.
Nikostrata, die Mutter des Euandros, kam mit ihrem Sohn von Arkadien nach Italien. Euandros wurde später Bundesgenosse des Aeneas bei der Gründung von Rom. Nikostrata galt in der Legende als die Erfinderin des lateinischen Alphabets. Auf diesem Bild zeigt Nikostrata dem Schüler das Alphabet und schließt ihm das Tor zum Turm der Wissenschaften auf. Er kommt zuerst in das *Triclinium*, den Speisesaal; dort soll er sich an der Grammatik des **Donatus** (lat. Grammatiker des 4.Jh.n.Chr.) und **Priscianus** (um 500, lehrte in Konstantinopel) laben. Dann steigt er auf zur Logik des **Aristoteles**, der Rhetorik und Poesie des **M. Tullius Cicero** und der Arithmetik des **Boethius**. Auf dem nächsten Stockwerk findet er die Musik des **Pythagoras**, die Geometrie **Euklids** und die Astronomie des **Ptolemaios**. Darüber erscheint die Physik; die dort stehende Abkürzung bedeutet *philosophus*; damit ist in der Regel Aristoteles gemeint. Ganz oben repräsentiert **Petrus Lombardus** die *Theologia seu Metaphysica*.

Diese Zusammenstellung beginnt mit einem Text aus dem Hochmittelalter, der einen sehr „schulischen" Charakter hat und offenbart, welches mathematische Wissen damals in den Klosterschulen vermittelt wurde.

TEXT 2 De computo dialogus

Dieser Text ist in mehreren Handschriften des 9. bis 12. Jahrhunderts überliefert, im Druck ist er bisher nur in der Patrologia Latina (tom. XC col. 647ff.) erschienen; dort ist er den Schriften des **Beda Venerabilis** (673–735 n. Chr.) zugeordnet. Die Autorschaft Bedas bezüglich dieses Textes ist mit Sicherheit falsch; dies beweisen die formalen und stilistischen Unterschiede zwischen *de computo dialogus* und den Fragmenten eines gleichlautenden Werkes Bedas. C. W. Jones, der die Werke *Bedas* edierte, glaubt, dass der verlorene *computus* Bedas auf einem nicht erhaltenen Lehrbuch für den irischen Schulunterricht aus dem 8. Jahrhundert basierte (*The lost Sirmond Manuscript of Bede's Computus,* English Historical Review L II (1937), 213f.*).* Der vorliegende Text könnte somit in seinem Kern auf entsprechende Schriften des 7. oder 8. Jahrhunderts zurückgehen, in seiner vorliegenden Form stammt er aber aus einer späteren Zeit. Bemerkenswert ist, dass *de computo dialogus* in großen Passagen wortwörtlich mit der Schrift *de computo* des **Hrabanus Maurus** (776–856) übereinstimmt. Genauere Untersuchungen werden aber erst dann möglich sein, wenn von diesem Text und anderen thematisch ähnlichen Texten textkritische Ausgaben vorliegen.

De computo dialogus ist einer von zahlreichen Texten mit gleichem oder ähnlichem Titel, die alle den Wert des Rechnens preisen und dem Leser eine Art mathematisches Basiswissen vermitteln. Die meisten dieser Texte sind anonym und unter dem Titel *Sententiae sancti Augustini et Isidori in laude compoti* in den Handschriften zusammengefasst. Thematisch überwiegen Schriften, die sich mit der genauen Datierung des Osterfestes im Ablauf der Jahre, dem *ordo paschalis*, beschäftigen.

Die *computistae*, wie die Verfasser dieser Texte genannt wurden, bestimmten mit ihren Schriften das mathematische Denken des 8. bis 10. Jahrhunderts. Mathematik wurde damals in Anlehnung an antike philosophische Lehren (z. B. die Stoa) als Teil der Philosophie betrachtet. Diese Ansicht beruhte auf der Vorstellung, dass das gesamte menschliche Wissen durch die *septem artes liberales* repräsentiert wird, wobei die vier Disziplinen Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie den naturwissenschaftlichen Bereich abdecken; alle sieben gipfeln in der Theologie, die im Mittelalter unter dem Einfluss des Christentums die Philosophie ersetzt hatte. Der Begriff *computus* darf daher nicht als Synonym für mechanisches Rechnen verstanden werden, vielmehr wird damit jede Form rationalen Denkens bezeichnet. Insofern ist *de computo dialogus* ein repräsentatives Beispiel für das naturwissenschaftliche Schrifttum des frühen Mittelalters.

Sarkophag des *Giovanni di Andrea* (14. Jhrhundert). Bologna Museo Civico Medievale. Dieser Ausschnitt zeigt eine Gruppe von Studenten, die dem Vortrag ihres Lehrers zuhören.

Augustinus dixit de quattuor divisionibus scripturae (*de doctrina christiana*): Quattuor necessaria sunt in ecclesia Dei: Canon divinus, in quo narratur et praedicatur vita futura; Historia, in qua rerum gesta narrantur; Numerus, in quo facta futurorum et solemnitates divinae dinumerantur; Grammatica, in qua verborum scientia intelligitur. Igitur quattuor sunt partes scripturae: Canon divinus, Historia, Numerus, Grammatica. Istae autem divisiones sunt

Augustinus sagte über die vier Kapitel seiner Schrift: *„Vier Dinge sind notwendig in der Kirche Gottes: Die Heilige Schrift, in der das zukünftige Leben erzählt und verkündet wird; die Geschichte, in der das Geschehene erzählt wird; die Zahl, mit der zukünftige Ereignisse und Feiern zu Ehren Gottes aufgezählt werden; die Grammatik, durch die man den Sinn der Worte versteht."* Daher besteht diese Schrift aus den vier Kapiteln: Canon divinus, Historia, Numerus, Grammatica. Diese vier quasi scripturae quattuor fundamenta. Isidorus in computi laude dicit (*etym. III 4,1ff.*): *Ratio numerorum contemnenda non est. In multis enim sanctarum scripturarum locis quantum mysterium habent elucet. Non enim frustra in laudibus Dei dictum est (Sap. 11,21): ‚Omnia in mensura et numero et pondere fecisti'. Senarius namque qui partibus suis perfectus est, perfectionem mundi quadam numeri significatione declarat. Similiter et quadraginta dies, quibus Moses et Helias et ipse Dominus ieiunaverunt, sine numerorum cognitione non intelliguntur. Sic et alii in scripturis sacris numeri existunt, quorum figuras nonnisi noti huius artis scientiae solvere possunt. Datum est etiam nobis ex aliqua parte sub numerorum consistere disciplina, quando horas per eam dicimus, quando de mensuum curriculo disputamus, quando spatium anni redeuntis agnoscimus. Per numerum siquidem ne confundamur instruimur. Tolle numerum in rebus omnibus, et omnia pereunt. Adime saeculo conputum, et cuncta ignorantia caeca complectitur, nec differri potest a ceteris animalibus, qui calculi nesciunt rationem.*

DISCIPULUS: Haec ergo ratio numerorum unde primum processit, scire nos cupimus.

MAGISTER: A Deo scilicet, quia omnis sapientia et scientia a Domino Deo est, ex quo facta sunt omnia.

DISCIPULUS: Dic ergo quando primum inventa est ista ratio?

MAGISTER: Ex illo tempore ex quo factae sunt creaturae, hoc est ab origine saeculi. Tunc enim primum numerus initiavit, sicut in Genesi legitur (*I 13*): *Et factum est vespere et mane dies unus*. Tunc ergo dixit de nocte et die, quando dixit vespere, id est nox, et mane, id est dies. De numero autem dixit, quando dixit dies unus, sic secundus, sic tertius, sic quartus, sic quintus, sic sextus, sic septimus. Iterum de numero dixit Deus, quando dixit de sole et luna (*Gen. I 14*): *Et sint in signa et tempora et dies et annos*. Quis enim potest intellegere dies et tempora et annos, nisi per numerum? Inde dixit Boethius (*inst. arithm. I 2*): *Omnia quaecunque a primaeva rerum natura constructa sunt, numerorum videntur ratione formata. Hoc enim fuit principale in animo conditoris exemplar. Hinc enim quattuor elementorum multitudo mutuata est, hinc temporum vices, hinc motus astrorum caelique conversio.* Item Boethius dicit (*inst. arithm. I 1*): *Proprie tamen ipsa numerorum natura omnis astrorum cursus omnisque astronomica ratio constituta est. Sic enim ortus occasusque colligimus: sic tarditates velocitatesque errantium siderum custodimus; sic defectus et multiplices lunae variationes agnoscimus.*

DISCIPULUS: Haec igitur ars, hoc est numerus, quod nomen generale habet?

Teile sind gleichsam die vier Bausteine dieser Schrift. Isidor sagt in seinem Lob der Naturwissenschaft: *„Das Wissen um die Zahlen darf nicht geringgeschätzt werden. Denn an vielen Stellen der heiligen Schriften zeigt sich, welch geheimnisvolle Bedeutung sie haben. Denn nicht umsonst wurde in den Lobpreisungen Gottes gebetet: ‚Du hast alles im richtigen Maß, in rechter Zahl und rechtem Gewicht erschaffen.' Denn die Zahl Sechs, die als Summe ihrer Teiler eine vollständige Zahl ist, bezeichnet durch diese Charakterisierung ihrer Zahleigenschaft die Vollständigkeit der Schöpfung. Auf ähnliche Weise versteht man ohne Kenntnis der Zahlen auch nicht die 40 Tage, die Moses, Elias und unser Herr gefastet haben. So kommen in den heiligen Schriften auch andere Zahlen vor, deren Sinngehalt nur die verstehen können, die dieses Wissens kundig sind. Auch uns ist es möglich, irgendwie auf die Kenntnis der Zahlen zurückzugreifen, wenn wir von Stunden sprechen, wenn wir über den Kreislauf der Monate sprechen, wenn wir die Zeitspanne des wiederkehrenden Jahres erkennen. Insofern werden wir durch die Zahl befähigt, nicht in Verwirrung zu stürzen. Beseitige die Zahl in allen Dingen, und alles geht zugrunde. Nimm der Menschheit die Naturwissenschaft, und blindes Nichtwissen erfüllt alles; die, die nichts von Mathematik verstehen, können nicht von den übrigen Lebewesen unterschieden werden."*

SCHÜLER: Wir wollen wissen, woher dieses erste Verstehen der Zahlen gekommen ist.

LEHRER: Von Gott wahrscheinlich, da alles Wissen und Verstehen von unserem Herrn und Gott stammt, aus dem alles entstanden ist.

S: Sag mir nun, wann dieses Verständnis zum ersten Mal entdeckt wurde.

L: Zu jener Zeit, als die Lebewesen erschaffen wurden, das heißt zu Beginn der Schöpfung. Denn damals trat die Zahl zum ersten Mal in Erscheinung; so liest man in der Genesis: *„Und es wurde erschaffen durch den Untergang und Aufgang der Sonne ein Tag."* Damals sprach Gott von der Nacht und vom Tag, weil er Sonnenuntergang, das heißt Nacht, und Sonnenaufgang, das heißt Tag, sagte. Von der Zahl aber sprach er, weil er sagte ein Tag, ebenso der zweite, der dritte, der vierte, der fünfte, der sechste, der siebte Tag. Ferner sprach Gott von der Zahl, als er Sonne und Mond erwähnte: *„Und sie sollen auf dem Himmel sein und Zeitläufe, Tage und Jahre bestimmen."* Denn wer kann ohne Hilfe der Zahl Tage, Zeitabstände und Jahre bestimmen? Daher sagte Boethius: *„Alles, was aus dem Urstoff gestaltet ist, erscheint aus der Kenntnis der Zahlen geformt. Dies war nämlich das wichtigste Geschenk des Schöpfergeistes an die Menschen. Daraus erklären sich die Mehrzahl der vier Elemente, der Wechsel der Zeiten, die Bewegung der Gestirne und die Drehung des Himelsgewölbes."* Ebenso sagt Boethius: *„Jede Bahn eines Sternes, jede astronomische Berechnung beruht ausschließlich auf der Kraft der Zahlen. So zählen wir die Aufgänge und Untergänge der Sonne; so kontrollieren wir Verlangsamung und Beschleunigung der Planeten; so erkennen wir die vielfältigen Phasen, sowie die Verfinsterung des Mondes."*

S: Wie heißt nun allgemein dieses Wissen, das heißt dieses Wissen um die Zahlen?

MAGISTER: Philosophia scilicet, quia omnis sapientia philosophia nominatur.
DISCIPULUS: Quid est philosophia? Cuius linguae est?
MAGISTER: Graecum nomen est, et interpretatur amor scientiae. *philos* enim apud Graecos, Latine amor dicitur. *sophia* vero sapientia vel scientia interpretatur.
DISCIPULUS: Philosophia quomodo diffinitur?
MAGISTER: Isidorus eam sic diffinivit dicens (*etym. II 24, 1*): *Philosophia est rerum humanarum divinarumque cognitio.* In hoc exemplo ostenditur quod omnis sapientia, sive divina sive humana, philosophia nuncupatur. Item alia diffinitio philosophiae (*Isid.: etym. II 24, 9*): *Philosophia est divinarum humanarumque rerum, in quantum possibile est, probabilis scientia*. Item alia diffinitio philosophiae (*ibid.*): *Philosophia est ars artium et disciplina disciplinarum.*
DISCIPULUS: Quot sunt divisiones philosophiae?
MAGISTER: Tres, id est, Physica, Ethica, Logica, hoc est naturalis, moralis, rationalis. Unde Isidorus dicit (*etym. II 24, 3ff.)*: *Philosophiae species tripertita est: una naturalis, quae Graece Physica appellatur, in qua de naturae inquisitione disseritur: altera moralis, quae Graece Ethica dicitur, in qua de moribus agitur: tertia rationalis, quae Graeco vocabulo Logica appellatur, in qua disputatur quemadmodum in rerum causis vel vitae moribus veritas ipsa quaeratur. In Physica igitur causa quaerendi, in Ethica ordo vivendi, in Logica ratio intellegendi versatur*. Item sunt ergo tres philosophiae partes, hoc est tres divisiones sapientiae, Physica, Ethica, Logica. In his etiam tribus generibus philosophiae eloquia divina consistunt. Nam aut de natura disputare solent, ut in Genesi et in Ecclesiaste aut in Proverbiis et in Epistolis Pauli apostoli aut in Cantico canticorum et in Evangeliis et in aliis multis libris, aut de moribus aut de superioribus mysteriis caelestibus, hoc est de Logica.
DISCIPULUS: Quis ergo invenit istas tres partes philosophiae?
MAGISTER: Physicam invenit Thales Milesius, unus ex septem sapientibus Graecorum. Ethicam invenit Socrates. Logicam invenit Plato philosophus.
DISCIPULUS: Ad quam igitur partem de his tribus philosophiae pertinet computus?
MAGISTER: Ad Physicam sine dubio.
DISCIPULUS: Physica vero quot divisiones habet?
MAGISTER: Quattuor, id est arithmeticam, geometriam, musicam, astronomiam.
DISCIPULUS: Arithmetica quid est?
MAGISTER: Numerabilis ars.
DISCIPULUS: Geometrica quid est?
MAGISTER: Terrae mensuratio.
DISCIPULUS: Musica quid est?
MAGISTER: Modulatio.

L: Philosophie vielleicht, weil jedes Wissen Philosophie genannt wird.

S: Was bedeutet Philosophie? Aus welcher Sprache stammt dieses Wort?

L: Das Wort ist griechisch und bedeutet Liebe zur Weisheit. Liebe wird nämlich griechisch *philos*, lateinisch *amor* genannt. *sophia* aber bedeutet Weisheit oder Wissen.

S: Wie wird Philosophie definiert?

L: Isidor definierte sie, indem er sagte: *„Die Philosophie ist das Erkennen des Menschlichen und des Göttlichen.“* In diesem Ausspruch wird aufgezeigt, dass jedes Wissen, sei es göttlich oder menschlich, Philosophie genannt wird. Eine andere Definition der Philosophie lautet: *„Philosophie ist das wahrscheinliche Wissen um das Göttliche und Menschliche, soweit es möglich ist.“* Eine dritte Definition der Philosophie lautet: *„Die Philosophie ist die Mutter aller Künste und Wissenschaften.“*

S: Wieviele Teile der Philosophie gibt es?

L: Drei, nämlich Physik, Ethik, Logik, das heißt den auf die Natur, den auf den Charakter und den auf die Vernunft sich beziehenden Teil. Deshalb sagt Isidor: *„Das Erscheinungsbild der Philosophie ist dreigeteilt. Ein Teil ist die naturalis pars, die griechisch Physik genannt wird, in der eine Erforschung der Natur stattfindet; der zweite Teil ist die moralis pars, die griechisch Ethik gernannt wird, die von sittlichem Verhalten handelt; der dritte Teil ist die rationalis pars, die auf griechisch mit Logik bezeichnet wird, durch die in Form einer Diskussion erörtert wird, wie man im Ursprung der Dinge oder im Verhalten eines Menschen nach der Wahrheit sucht. In der Physik beschäftigt man sich mit den Grundlagen wissenschaftlicher Fragestellung, in der Ethik mit der Wertigkeit des Lebens, in der Logik mit den Methoden des Verstehens und Beurteilens.“* Folglich gibt es drei Teile der Philosophie, das heißt eine Dreigliederung des Wissens in Physik, Ethik, Logik. Auf diesen drei Grundeinteilungen der Philosophie beruht das von Gott beeinflusste Schrifttum. Denn entweder pflegt man Erörterungen über die Natur zu führen, wie in der Genesis, im Buch Jesus Sirach, im Buch der Sprichwörter, in den Briefen des Apostels Paulus, im Hohelied, in den Evangelien und in vielen anderen Büchern, oder Erörterungen über das sittliche Verhalten oder über tiefere Glaubenswahrheiten, das heißt über Themen der Logik.

S: Wer hat diese drei Teile der Philosophie geschaffen?

L: Die Physik schuf Thales von Milet, einer der sieben griechischen Weisen, die Ethik formte Sokrates, die Logik Plato.

S: Auf welchen dieser drei Teile der Philosophie bezieht sich der *computus*?

L: Ohne Zweifel auf die Physik.

S: In wieviele Teile zerfällt die Physik?

L: In vier Teile, nämlich in Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie.

S: Was ist Arithmetik?

L: Die Lehre von den Zahlen.

S: Was ist Geometrie?

L: Die Vermessung der Erde

S: Was ist Musik?

L: Takt und Rhythmus.

DISCIPULUS: Astronomia quid est?
MAGISTER: Astrorum lex.
DISCIPULUS: Ex his itaque quattuor divisionibus physicae, id est naturalis scientiae, quae prima discenda est?
MAGISTER: Arithmetica procul dubio, quae principium matrisque quodam modo ad ceteras obtinet portionem. Arithmetica enim cunctis prior est, quia hanc ille huius mundanae molis conditor Deus primum suae habuit ratiocinationis exemplar: ex hac cuncta constituit, hoc est, per numeros omnia elementa constituit et ordinavit.
DISCIPULUS: Quis primus invenit numerum apud Hebraeos et Aegyptios?
MAGISTER: Abraham primus invenit numerum apud Hebraeos, deinde Moses; et Abraham tradidit istam scientiam numeri ad Aegyptios et docuit eos, deinde Iosephus.
DISCIPULUS: Quis primus istam scientiam numeri habuit apud Graecos et Latinos?
MAGISTER: Pythagoras apud Graecos, Apuleius et Boethius apud Latinos; unde Isidorus dicit (*etym. III 2, 1*): *Numeri disciplinam apud Graecos primum Pythagoram autumant conscripsisse, ac deinde a Nicomacho diffusius esse dispositam; quam apud Latinos primus Apuleius, deinde Boethius transtulerunt.*
DISCIPULUS: Quomodo numerus nominatur apud Hebraeos et Chaldaeos et Syros et Macedones?
MAGISTER: Vocatur *nonnan* apud Hebraeos, Chaldaeos et Syros, apud Macedones calculus – calculator nomen accepit a calculis, id est lapillis minutis, quos antiqui in manu tenentes componebant numerum –, apud alios Graecos cyclus vel rhythmus, apud Aegyptios latercus – inde laterculus diminutive dicitur – et rima, unde rimarii appellantur.
DISCIPULUS: Illud nomen, quod dicitur numerus, simplexne est an compositum?
MAGISTER: Compositum, scilicet ex duobus corruptis. Nume- enim ex eo nomine quod est nummus venit, *-rus* autem ex eo nomine quod est rivus derivatur. Ex rivo enim nummorum, id est ex multitudine census, qui reddebatur regibus vel imperatoribus, numerus nomen accepit. Unde Isidorus dicit (*etym. III 3, 1*): *Numero nummus nomen dedit, et a sui frequentatione vocabulum indidit.*
DISCIPULUS: Numerus unde nomen accepit?
MAGISTER: A Numeria. Hinc Augustinus ait (*civ. Dei IV 11*): Numerus a Numeria quadam dea nominatur, cuius sacerdotes retroversis vultibus offerebant et post oblata munera retro pergebant.
DISCIPULUS: Numerus quomodo diffinitur?
MAGISTER: Isidorus diffinivit dicens (*etym. III 3, 1*): *Numerus autem est multitudo ex unitatibus constituta. Nam unum semen numeri esse, non numerum*. Item alius dicit: Unus non est numerus, sed ab eo crescunt numeri. Tamen Donatus etiam

S: Was ist Astronomie?
L: Sternkunde.
S: Welches dieser vier Teilgebiete der Physik, das heißt der sich mit den Gesetzmäßigkeiten in der Natur beschäftigenden Wissenschaft, muss man als Erstes lernen?
L: Ohne Zweifel die Arithmetik, die für die anderen Teilgebiete die Grundlage bildet und gewissermaßen die Stellung einer Mutter einnimmt. Die Arithmetik ist wichtiger als alle anderen, weil Gott, der Schöpfer dieses gewaltigen Universums, diese als erstes Zeugnis seiner göttlichen Vernunft erscheinen ließ: Mit ihrer Hilfe errichtete er alles, das heißt, alle Elemente schuf und ordnete er mit Hilfe der Zahlen.
S: Wer hat als Erster bei den Hebräern und Ägyptern die Zahl entdeckt?
L: Bei den Hebräern entdeckte zuerst Abraham die Zahl und dann Moses; Abraham gab dieses Wissen von der Zahl an die Ägypter weiter und lehrte sie, später dann Joseph.
S: Wer besaß als Erster dieses Wissen um die Zahl bei Griechen und Römern?
L: Pythagoras bei den Griechen, Apuleius und Boethius bei den Römern. Deshalb sagt Isidor: *„Man glaubt,dass bei den Griechen ursprünglich Pythagoras die Lehre von der Zahl aufgeschrieben hat, und dass diese später von Nikomachos ausführlicher dargelegt wurde; diese haben zuerst Apuleius und später Boethius ins Lateinische übertragen.“*
S: Wie wird „Zahl“ bei den Hebräern, den Babyloniern, den Syrern und Griechen genannt?
L: Bei den Hebräern, Babyloniern und Syrern wird sie *nonnan* genannt, bei den Makedoniern *calculus,* – der *calculator*, „Rechenmeister“, hat seinen Namen von den *calculi*, das heißt von den kleinen Rechensteinen, die die Alten in der Hand hielten und damit eine Zahl darstellten – bei anderen Griechen hieß sie *kyklos* oder *rhythmos*, bei den Ägyptern *latercus* – daraus wird die Verkleinerungsform *laterculus* gebildet – und *rima*, nach der die *rimarii*, die „Reimschmiede“ benannt werden.
S: Jenes Wort *numerus*, ist es ein einfaches oder zusammengesetztes Wort?
L: Ein wahrscheinlich aus zwei verkürzten Wörtern zusammengesetztes. Denn *nume-* hat denselben Stamm wie *nummus*, „Geldstück“, *-rus* wird vom gleichen Stamm wie *rivus*, „Fluss“, gebildet wird. Von dem Fluss der Geldmünzen, das heißt von der Menge der Abgaben, die den Königen und Kaisern gezahlt wurden, hat *numerus* seine Bedeutung erhalten. Deshalb sagt Isidor: *„nummus hat numerus seinen Namen gegeben, und seine oftmalige Erwähnung hat das Wort geformt.“*
S: Woher stammt die Bezeichnung *numerus*?
L: Von *Numeria*. Daher sagt Augustinus: *„Numerus ist nach einer gewissen Göttin Numeria benannt, deren Priester mit zurückgewandten Augen opferten und sich nach dem Opfer nach hinten entfernten.“*
S: Wie wird „Zahl“ definiert?
L: Isidor definierte, indem er sagte: *„‚Zahl‘ ist die aus Einheiten gebildete Mehrheit. Denn wir sagen, dass die Eins die Keimzelle aller Zahlen, selbst aber keine Zahl ist.“* Ebenso sagt ein anderer: *„Die Eins ist keine Zahl, aber aus ihr entstehen die Zahlen.“*

unum pro numero posuit dicens (*ars gramm. Keil p. 355, 19*): *Numerus est singularis, ut hic magister*. Item Augustinus dicit: Numerus est singularis corporis ac vocis et significationis collectio. Item numerus dicitur a numerando vel, ut supra dictum est, a Numeria dea, quam antiqui dicebant deam esse numeri, sive numerus dicitur quasi nummorum rivus. Antiqui enim nescientes numerare ex lapillis sua tempora suosque dies numerabant, in prosperitate candidis in adversitate nigris. Unde Persius ait (*sat. II 1*):

hunc, Macrine, diem numera meliore lapillo.

DISCIPULUS: Quomodo nominantur numeri ab uno usque ad mille et myriadas?

MAGISTER: Sic nominantur: Unum, duo, tres, quattuor, quinque, sex, septem, octo, novem, decem; undecim, duodecim, tredecim, quattuordecim, quindecim, sedecim vel sexdecim, septemdecim vel decemseptem, octodecim, novemdecim, viginti; viginti unum, viginti duo, viginti tria, viginti quattuor, viginti quinque, viginti sex, viginti septem, viginti octo, viginti novem, triginta; triginta unum, triginta duo, triginta tria, triginta quattuor, triginta quinque, triginta sex, triginta septem, triginta octo, triginta novem, quadraginta; quadraginta unum, quadraginta duo, quadraginta tria, quadraginta quattuor, quadraginta quinque, quadraginta sex, quadraginta septem, quadraginta octo, quadraginta novem, quinquaginta; quinquaginta unum, quinquaginta duo, quinquaginta tria, quinquaginta quattuor, quinquaginta quinque, quinquaginta sex, quinquaginta septem, quinquaginta octo, quinquaginta novem, sexaginta; sexaginta unum, sexaginta duo, sexaginta tria, sexaginta quattuor, sexaginta quinque, sexaginta sex, sexaginta septem, sexaginta octo, sexaginta novem, septuaginta; septuaginta unum, septuaginta duo, septuaginta tria, septuaginta quattuor, septuaginta quinque, septuaginta sex, septuaginta septem, septuaginta octo, septuaginta novem, octoginta; octoginta unum, octoginta duo, octoginta tria, octoginta quattuor, octoginta quinque, octoginta sex, octoginta septem, octoginta octo, octoginta novem, nonaginta; nonaginta unum, nonaginta duo, nonaginta tria, nonaginta quattuor, nonaginta quinque, nonaginta sex, nonaginta septem, nonaginta octo, nonaginta novem, centum; centum et unum, centum et duo, centum et tria, centum et quattuor, centum et quinque, centum et sex, centum et septem, centum et octo, centum et novem, centum et decem; ducenta, trecenta, quadringenta, quingenta, sexcenta, septingenta, octingenta, noningenta, mille; duo milia, tria milia, quattuor milia, quinque milia, sex milia, septem milia, octo milia, novem milia, decem milia.

Sic constat, quod decem decies multiplicatus centum facit. Centum decies multiplicatus mille facit. Mille decies multiplicatus myriadam facit. Sic viginti duas myriadas, et triginta tres myriadas, et quadraginta quattuor myriadas, et quinquaginta

Doch Donatus hat die Eins als Zahl bestimmt, wenn er sagt: *„Es gibt eine Einzahl, wie hic magister.“* Ebenso sagt Augustinus: *„Die Zahl bildet eine Einheit aus Zahlenwert, Benennung und Zeichen.“* Ebenso hängt *numerus* mit *numerare*, „zählen“,zusammen und hat seinen Namen entweder, wie oben erwähnt, von der Göttin *Numeria*, von der die Alten sagten, dass sie die Göttin der Zahl ist, oder von *nummorum rivus*, „Geldfluss“. Denn als die Alten noch nicht zählen konnten, kennzeichneten sie Stunden und Tage mit Steinchen, die günstigen mit weißen, die widrigen mit schwarzen. Deshalb sagt Persius: *„Macrinus, bezeichne diesen Tag mit einem glückbringenden Steinchen.“*

S: Wie werden die Zahlen von Eins bis Tausend und den Vielfachen von Zehntausend genannt?

L: Sie werden folgendermaßen genannt: Eins, Zwei, Drei, ..., Zehntausend.

So steht fest, dass 10 mal 10 gerechnet 100 ergibt, 10 mal 100 1000, 10 mal 1000 10000, 20 mal 1000 20000, ..., 10 mal 100000 1000000.

quinque myriadas, et sexaginta sex myriadas et septuaginta septem myriadas, et octoginta octo myriadas, et nonaginta novem myriadas, et centum decem myriadas, bis centum viginti myriadas, ter centum triginta myriadas, quater centum quadraginta myriadas, quinquies centum quinquaginta myriadas, sexies centum sexaginta myriadas, septies centum septuaginta myriadas, octies centum octoginta myriadas, nonies centum nonaginta myriadas, decies centena milia centum myriadas.

DISCIPULUS: Ista nomina numeri, quae diximus, per quas notas significantur apud Latinos?

MAGISTER: Per istas septem notas, hoc est I, V, X, L, C, D, M.

DISCIPULUS: Quomodo istae notae significant numeros?

MAGISTER: Aut simpliciter solae significant aut compositae.

DISCIPULUS: Aliae cum aliis aut multiplicatae per se?

MAGISTER: Simpliciter significant, sicut est I sola unum, V sola quinque, X sola decem; L per se quinquaginta, C per se significat centum; D sola quingentos, M sola aut I cum titulo supra mille significat.

DISCIPULUS: Quomodo autem multiplicatae per se numerum generant?

MAGISTER: Veluti I duplicata, sic II, duos significat, triplicata III tres, quadruplicata IIII quattuor.

DISCIPULUS: Quamobrem I unum significat?

MAGISTER: Quid autem convenientius est quam illa littera, quae minima est litterarum in charactere, ut significaret illum numerum, qui minimus est in numeris, hoc est unus. Nulla autem nota apud Latinos multiplicatur plus quam per quattuor vices. Deinde post IIII sequitur V, quae quinque significat.

DISCIPULUS: At quid V quinque significat?

MAGISTER: Quia V quinta vocalis est in ordine vocalium; et qualis est in ordine vocalium, talis est in numero. Hinc de V littera quinque nec quinque virgulis notatur, de X littera decem nec V duplicata; sed sequente V I ponitur in numero. Si unum I, VI fiunt sex, si duo, VII septem, si tres, VIII octo, si quattuor, VIIII novem; plus non crescit. Deinde sequitur X, quae decem significat.

DISCIPULUS: Quis ostendit quod X decem significat?

MAGISTER: Isidorus dicit (*etym. I 3, 10f*): Nomina litterarum *apud Graecos et verba componunt et numeros faciunt. Latini autem numeros ad litteras non computant, sed sola verba componunt, excepta I et X littera, quae et figura crucem significat et in numero decem demonstrat*. Sequente X I multiplicatur usque ad XIIII, quae quattuordecim denotat. Deinde sequitur V post X et fiunt XV. Sequente V multiplicata I quater, sic XVIIII, fit novemdecim.

S: Diese Zahlen, die wir genannt haben, mit welchen Zahlzeichen werden sie bei den Römern angeschrieben?

L: Durch folgende sieben Zeichen, nämlich I, V, X, L, C, D, M.

S: Wie bezeichnen diese Zeichen die Zahlen?

L: Entweder für sich allein oder nebeneinandergestellt.

S: Die einen mit den anderen oder dieselben mehrmals nebeneinandergestellt?

L: Ein alleinstehendes I bezeichnet eins, ein alleinstehendes V fünf, ein alleinstehendes X zehn, L für sich fünfzig, C für sich hundert, ein alleinstehendes D fünfhundert, ein alleinstehendes M oder ein I mit einem Querstrich darüber bezeichnet tausend.

S: Wie aber bestimmen nebeneinander gestellte gleiche Zahlzeichen eine Zahl?

L: Wie ein zweimal nebeneinander gestelltes I die Zahl Zwei bestimmt, so bestimmt ein dreimal gesetztes I 3 und ein viermal gesetztes I 4

S: Warum ist I das Zeichen für die Zahl Eins?

L: Was könnte passender sein, als dass der Buchstabe, der der einfachste in seiner Schreibweise ist, jene Zahl bezeichnet, die die kleinste ist, nämlich eins. Kein Zahlzeichen wird bei den Römern öfter als viermal nebeneinander gesetzt. Auf IIII folgt V, das das Zeichen für 5 ist.

S: Doch warum ist V das Zeichen für 5?

L: Weil V der fünfte Vokal in der Reihenfolge der Vokale ist. Und wie es für die Reihenfolge der Vokale gilt, so gilt es auch für die Zahlen. Daher wird 5 durch V und nicht durch fünf Striche, 10 durch X und nicht durch zwei nebeneinandergesetzte V bezeichnet Bei einer Zahl wird nach V I gesetzt. Ein nach V gesetztes I bezeichnet sechs, zwei nach V gesetzte I bezeichnen sieben, drei I acht, vier I neun; weiter wächst die Anzahl der I nicht. Dann folgt X, das das Zeichen für 10 ist.

S: Wer hat bestimmt, dass X das Zeichen für 10 ist?

L: Isidor sagt: *„Bei den Griechen bilden Buchstaben Wörter, sie bezeichnen aber auch Zahlen. Die Römer aber schreiben Zahlen nicht mit Buchstaben an, sondern bilden daraus nur Wörter, mit Ausnahme der Buchstaben I und X, von denen der zweite in seiner Form ein Kreuz darstellt und das Zahlzeichen für 10 ist.“* Nach X wird I mehrfach nachgestellt bis XIIII, dem Zeichen für 14. Dann folgt V nach X, was 15 bedeutet. Nach V wird I bis zu viermal hinzugesetzt, XVIIII steht für 19.

DISCIPULUS: Viginti quae nota significat?
MAGISTER: Littera X duplicata. Bis enim X, sic XX, propterea dicuntur viginti, quia bis decem genita, et ter X, sic XXX, triginta, quia ter decem genita.
DISCIPULUS: Per qualem notam significantur triginta?
MAGISTER: Per X ter multiplicatam. Et X non multiplicatur plus quam per tres vices.
DISCIPULUS: Quadraginta, per qualem notam significantur?
MAGISTER: Per XL. Omnis enim littera numeralis minus significans, si praecedit, tantum demit de sequente, quantum in se habet, velut XL pro XXXX.
DISCIPULUS: Quadraginta quare dicuntur?
MAGISTER: Id est quater decem genita.
DISCIPULUS: Quae nota significat quinquaginta?
MAGISTER: Littera L.
DISCIPULUS: Quamobrem?
MAGISTER: Quia numerus principalis in lege Domini est quinquagenarius. Sub illo enim numero cadebat Iubilaeus, hoc est in quinquagesimo anno. Conveniens autem erat, ut ille numerus, qui principatum in lege veteri obtinet, hoc est quinquagenarius, per illam litteram L, quae prima est in illo nomine, quod est lex, significaretur, sexaginta vero per L et X, septuaginta per L et duo XX, octoginta per L et tria XXX.
DISCIPULUS: Quae nota significat nonaginta?
MAGISTER: Duae notae significant nonaginta aut X inter duo L, ut LXL, aut X ante C, ut XC.
DISCIPULUS: Quae nota significat centum?
MAGISTER: Littera C.
DISCIPULUS: Quare?
MAGISTER: Quia prima est in illo nomine, quod est centum. Usus enim erat saepe apud veteres per primam litteram nomina significare.
DISCIPULUS: Unde dicitur centum?
MAGISTER: A cantu, hoc est a circulo vel a choro cantantium. Mos enim erat apud veteres centum homines in choro cantantium habere. Centum ideo a cantu vel a circulo dicitur. C vero duplicata, sic CC, significat ducentos, triplicata CCC trecentos, quadruplicata CCCC quadringentos.
DISCIPULUS: Quae nota significat quingentos?
MAGISTER: Ipsa D littera.
DISCIPULUS: Quare?
MAGISTER: Conveniens autem erat, ut numero prioris litterae, hoc est C, finito illa littera, quae sequitur in ordine litterarum, nempe D, teneret numerum sequentem, hoc est quingentos. Deinde C sequente D, sic DC, sexcentos; duo CC sequente D, sic DCC, septingentos; ter ducta C sequente D, sic DCCC, fit octingentos. Quater C multiplicata sequente D, sic DCCCC, nongentos significat. Mille autem signatur nota M – ut iam diximus –, quoniam ipsa est prima littera in hac dictione mille. Mille vero a multitudine procedit et usque ad centum centena milia pervenit.

S: Welches Zeichen steht für 20?
L: Ein zweifaches X. Ein zweimal nebeneinander gestelltes X wird deshalb *viginti*, zwanzig, genannt, weil es aus zweimal, *bis*, zehn entstanden, *genita*, ist, und dreimal X *triginta*, dreißig, weil es aus dreimal, *ter*, zehn entstanden ist.
S: Durch welches Zeichen wird 30 ausgedrückt?
L: Durch ein dreimal nebeneinander gestelltes X. X wird nicht öfter als dreimal nebeneinander gestellt.
S: Durch welches Zeichen wird die Zahl 40 dargestellt?
L: Durch XL. Denn jedes Zahlzeichen bestimmt eine kleinere Zahl, wenn es einem höherwertigen Zahlzeichen vorangestellt ist, wobei es soviel vom Zahlenwert des folgenden Zeichens wegnimmt, wieviel an Zahlenwert in ihm steckt: Wir schreiben somit XL statt XXXX.
S: Warum sagt man *quadraginta*, vierzig?
L: *Quadraginta* bedeutet aus viermal, *quater*, zehn entstanden.
S: Welches Zeichen steht für 50?
L: Der Buchstabe L.
S: Warum?
L: Weil die wichtigste Zahl *in lege Domini*, im Gesetz des Herrn, die Zahl 50 ist. Denn auf diese Zahl, das heißt auf die Zahl 50, fiel ein Jubiläumsjahr. Es fügte sich aber gut, dass jene Zahl 50, die im alten Gesetz die wichtigste Rolle spielte, durch den Buchstaben L, der im Wort lex der erste ist, bezeichnet wird, 60 aber durch LX, 70 durch LXX, 80 durch LXXX.
S: Welches Zeichen steht für 90?
L: Zwei Zeichen stehen für 90, entweder X zwischen zwei L, nämlich LXL, oder X vor C, XC.
S: Welches Zeichen steht für 100?
L: Der Buchstabe C.
S: Warum?
L: Weil es der erste Buchstabe des Wortes *centum* ist. Es war nämlich in alten Zeiten üblich, Worte mit dem ersten Buchstaben abzukürzen.
S: Woher stammt das Wort *centum*?
L: Von *cantus*, das heißt genauer von *circulus cantantium*, einer Ansammlung oder einem Chor von Sängern. Es war nämlich in alten Zeiten üblich, 100 Sänger in einem Chor zu haben. Das Wort *centum* stammt daher von *cantus* oder von *circulus*. Ein zweimal nebeneinandergestelltes C steht für 200, CCC für 300, CCCC für 400.
S: Was ist das Zeichen für 500?
L: Der Buchstabe D.
S : Warum?
L: Es empfahl sich, dass nach den Zahlen, die mit dem Zeichen C dargestellt werden, jener Buchstabe, der im Alphabet folgt, nämlich D, die folgende Zahl 500 bezeichnet. Wenn ein C auf D folgt, so bezeichnet es 600, zwei auf D folgende C bezeichnen 700, drei auf D folgende C 800, vier auf D folgende C 900. 1000 aber wird durch M dargestellt, weil, wie wir schon sagten, dies der erste Buchstabe des Wortes *mille* ist. 1000 aber vermehrt sich entsprechend seinem mehrmaligen Vorkommen bis zu hundertmal 100000.

Antike Vorstellung des Charakters der Zahlen

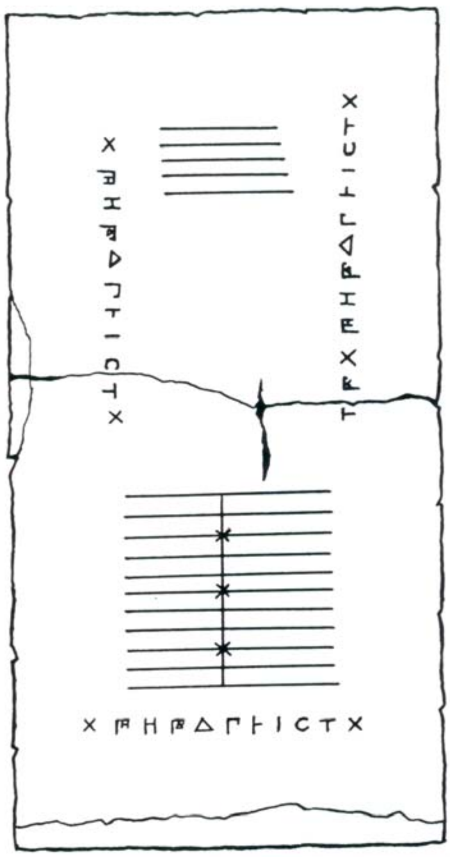
Die Behauptung, dass die Eins keine Zahl ist, beruht auf entsprechenden griechischen Vorstellungen. In der Arithmetik des **Nikomachos von Gerasa** (1. Jahrhundert n. Chr.) ist zu lesen (Buch 1, Kap. 7, 1*): Die erste Einteilung der Zahlen ist die in gerade und ungerade*. Die zugehörigen Definitionen lauten bei **Euklid** (Elem. VII, Def. 6, 7): *Gerade ist die Zahl, die sich halbieren lässt, und ungerade die, die sich nicht halbieren lässt, oder die sich um eine Einheit von einer geraden Zahl unterscheidet*. Über das Alter dieser Definition gibt es einen Hinweis in einem Fragment aus einer Komödie des **Epicharm**, der um 480 v. Chr in Syrakus schrieb (Diels 23 B 2): *Wenn einer zu einer ungeraden Zahl, meinethalben auch zu einer geraden, einen Stein zulegen oder auch von den vorhandenen einen wegnehmen will, meinst du wohl, sie bleibe noch dieselbe?* Um diese Zeit muss diese Definition Euklids schon bekannt gewesen sein. Vorher definiert Euklid, was eine Zahl ist, nämlich (Def. 2) *eine aus Einheiten zusammengesetzte Menge.* Die Einheit selbst, nämlich (Def. 1) *das, wonach jedes Ding eines genannt wird*, galt nicht als Zahl, sondern als Ursprung aller Zahlen. Demgemäß definiert Euklid (Def. 11, 13): *Primzahl ist eine Zahl, die sich nur durch die Einheit messen lässt. Zusammengesetzt ist eine Zahl, die sich durch irgendeine Zahl messen lässt*. Diese Meinung galt bis ins 16. Jahrhundert als richtig. Nach **Theon von Smyrna** (Philosoph und Mathematiker des 2. Jahrhunderts n.Chr.) enthält die Eins *wie ein Samenkorn alle Eigenschaften des künftigen Lebens in sich*, und **Plotin** (205–270; Begründer des Neuplatonismus) erachtete Gott als die absolute Einheit und verwendete daher auch die Eins als Symbol Gottes. Noch im *zwey rechenbüchlin: uff der Linien vnd Zipher, Mit eym angehenckten Visirbuch* von **Jakob Köbel** (Oppenheim 1537) heißt es:

> *Darauss verstehstu das 1. kein zal ist / sonder es ist ein geberin /*
> *anfang / vnd fundament aller andern zalen*.

Erst im Jahre 1585 behauptete **Simon Stevin** in seinem Werk *L'arithmetique* die Zahlnatur von 1. Er argumentierte so: Wenn ich von einer Zahl 3 eine Nicht-Zahl abziehe, so bleibt sie 3; da aber 3 – 1 = 2 ist, so ist 1 keine Nicht-Zahl, also eine Zahl.

Griechische und römische Zahlzeichen (Text 3)

Von der einfachsten Darstellung der Zahlen durch bloße Wiederholung des nämlichen Zeichens findet sich bei den Römern folgende Spur. Im Heiligtum der Minerva wurde jedes Jahr ein Nagel eingeschlagen, um die Zahl der Jahre vorzustellen.
lex vetusta est, priscis litteris verbisque scripta, ut qui praetor maximus sit idibus Septembribus clavum pangat; fixa fuit dextro lateri aedis Iovis optimi maximi, ex qua parte Minervae templum est. eum clavum, quia rarae per ea tempora litterae erant, notam numeri annorum fuisse ferunt eoque Minervae templo dicatam legem quia numerus Minervae inventum sit. (Liv. VII 3, 5ff.)



Es gibt ein altes Gesetz, aufgeschrieben in altertümlichen Buchstaben und Worten, dass der praetor maximus am 13. September einen Nagel einschlagen muss; dieses Gesetz war an der rechten Seite des Tempels des Jupiter optimus maximus angebracht an der Seite, an der der Tempel der Minerva liegt. Man sagt, dass dieser Nagel ein Zeichen für die Jahreszahl war, weil Zahlzeichen zu dieser Zeit noch selten waren, und dass dieses Gesetz dem Tempel der Minerva geweiht war, weil die Zahl als Erfindung der Minerva galt.

Ähnlich ist das *numerare diem lapillo* zu verstehen, das im TEXT 2 (Persius sat. II 1) zitiert wird. Die Darstellung von Zahlen mit Steinchen ist auch bei den Griechen bekannt. So sagt **Aristophanes** in den *Wespen* (v. 656): *Rechne ganz einfach, nicht mit Steinen, sondern von der Hand weg.* Aus einer Anordnung der Steinchen in Kolumnen auf einer Unterlage könnte dann der griechische Abakus entstanden sein, wie er sich in einem Exemplar in der Salaminischen Rechentafel erhalten hat. (s. nebenstehende Abb.) Die Kolumnenüberschriften 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 5000 zeigen den dezimalen Aufbau mit Zwischenstufen. Andere Kolumnen sind, da es sich um ein kaufmännisches Hilfsmittel handelt, bestimmt für das Talent (6000 Drachmen), den Obolos ($^1/_6$ Drachme) und weitere Bruchteile.
Für die Zahlenschreibung mit Individualzeichen gab es bei den Griechen zwei Systeme: Das erste, auch auf der Salaminischen Rechentafel und auf Tributlisten und Abrechnungen verwen-

dete, ältere attische System ist *akrophonisch*, das heißt, es verwendete für die Zehnerstufen jeweils den Anfang des betreffenden Zahlwortes; dazu werden Zwischenstufen bei fünf eingeschaltet, so dass z.B. 500 als eine Fünf im Bereich der Hunderter erscheint. Die Formen sind (neben dem Einerstrich |):

	10 Δ (έκα)	100 H (εκατόν)	1 000 X (ίλιοι)	10 000 M (ύριοι)
5 Π (έντε)	50 𐅄	500 𐅅	5 000 𐅆	50 000 𐅇
	πεντήκοντα	*πεντακόσια*	*πεντακισχίλια*	*πεντακισμύρια*

Beispiel 1978 = X 𐅅 HHHH 𐅄 ΔΔ Π III

Diese Zeichen lassen sich von 454 bis gegen 95 v.Chr. in Inschriften nachweisen. Sie sind von dem Grammatiker **Herodian** (2. Jh. n.Chr.) beschrieben worden und werden deshalb gelegentlich „*Herodianische Zeichen*" genannt.
Wesentlich kürzer, aber nicht so übersichtlich ist das jüngere System, das von der Mitte des 5.Jh.v.Chr. an nachgewiesen ist. Es verwendet die 24 Buchstaben des Alphabets zusammen mit den drei Episemen *Vau, Koppa* und *Sampi* zur Bezeichnung der Zahlen in der folgenden Weise:

α	1	ι	10	ρ	100
β	2	κ	20	σ	200
γ	3	λ	30	τ	300
δ	4	μ	40	υ	400
ε	5	ν	50	φ	500
ς	6	ξ	60	χ	600
ζ	7	ο	70	ψ	700
η	8	π	80	ω	800
ϑ	9	ϙ	90	ϡ	900

Die Tausender erhalten links einen kleinen Strich oder eine Schleife, z.B.

1978 = ,αϡοη

Zur Unterscheidung von den Wortbuchstaben werden die Zahlbuchstaben (bei sorgfältiger Schreibung) überstrichen oder es wird ihnen oben ein Strich angehängt, welch letzterer auch bei den Brüchen verwendet wird. Die Zehntausender werden durch M mit dem darüber gesetzten Zahlenfaktor bezeichnet, z.B.

349450 = $\frac{\lambda\delta}{\mathrm{M}}\,,\overline{\vartheta\upsilon\nu}$

In dem Zahlensystem des **Apollonios**, das auf Myriaden aufgebaut ist, wurden Myriaden erster, zweiter usw. Ordnung unterschieden, z.B.

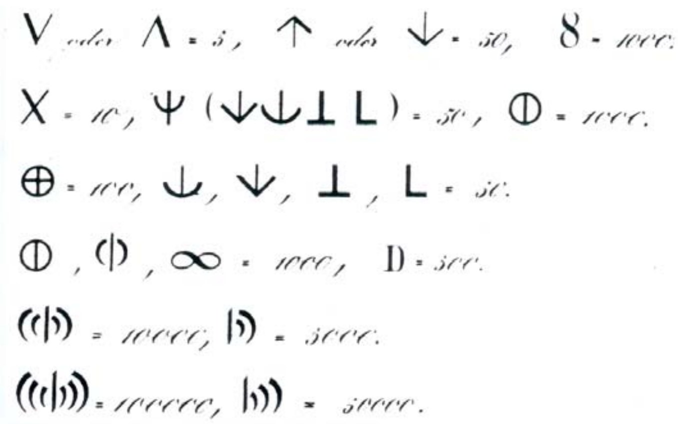
5462360064000000 = $\overset{\gamma}{\mu}$,ευξβ καὶ $\overset{\beta}{\mu}$,γχ καὶ $\overset{\alpha}{\mu}$,ςυ

Als Zahlzeichen verwendeten die Römer – ähnlich den herodianischen Zahlzeichen der Griechen – Individualzeichen für die Zehnerpotenzen und die Zwischenstufen 5, 50, 500.

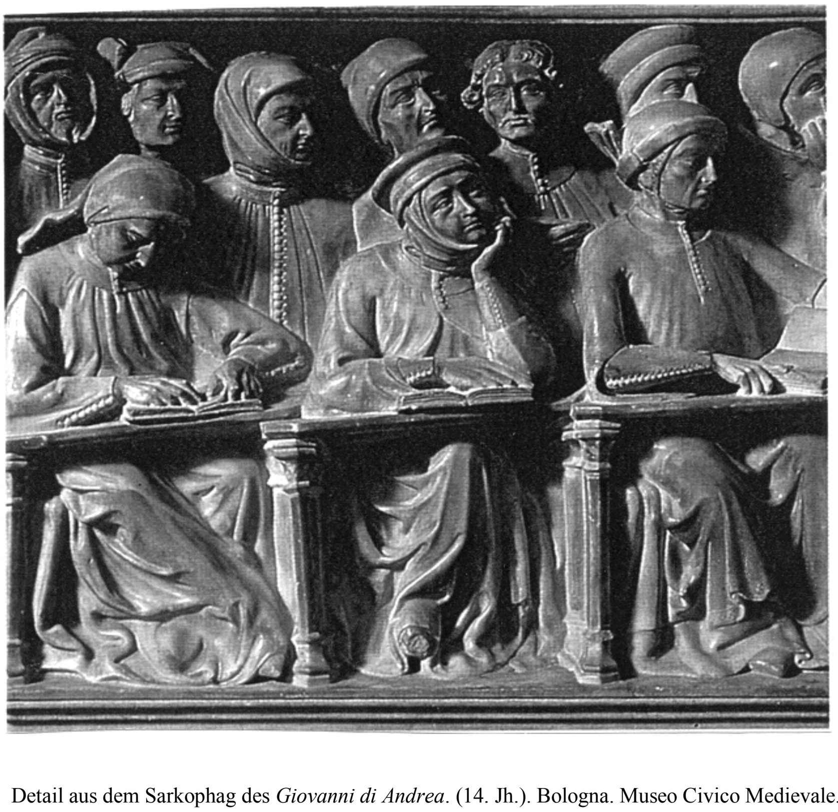
I		X		C		ↀ (auch (|), ∞).
	V		L (auch ↓, ⊥, ⊥)		D	

Wie beim herodianischen System der Griechen gilt bei den Römern für zusammengesetzte Zahlen gewöhnlich das additive Prinzip, z.B. 89 = LXXXVIIII.
Über die Entstehung der römischen Zahlzeichen schreibt **Theodor Mommsen** (*Die unteritalienischen Dialekte*. Leipzig 1840. S. 19f. und 33f.), dass die Römer zur Bezeichnung der Zahlen nicht, wie die Griechen, Buchstaben verwendeten, da ihrem Alphabet die dazu nötige feste Ordnung von Anfang fehlte. Er vermutete, dass die aus dem Alphabet entfernten Buchstaben X, **Θ, Φ** als Zahlzeichen für 10, 100 und 1000 verwendet wurden. Hieraus lassen sich die Fünferstufen durch Halbieren herleiten. Demnach hätten C und M nichts mit den Zahlwörtern *centum* und *mille* zu tun.

Gottfried Friedlein (*Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer*. Erlangen 1869. S. 27f.) vermutet hingegen, dass der Anlass zur Entwicklung der römischen Zahlzeichen die Vermessung des Landes mit der *pertica*, der Messrute war. Er schreibt:



„Mit größter Wahrscheinlichkeit ist der Anlass die Vermessung des Landes durch die Gromatiker gewesen, zu welcher als Messrute die pertica *oder* decempada *diente, und wenn es nun als das natürlichste erscheinen muss, dass man die Stellen von 10 zu 10 Fuß mit einem Querstrich durch die abzumessende Linie bezeichnete, so liegt es doch sehr nahe, dass das Zeichen + oder in bequemerer Form × · als das Zeichen für 10 gewählt wurde, und die Hälfte desselben, nämlich* V *oder* Λ *als das Zeichen für 5. Ganz natürlich war es dann weiter, die Einfassung von 10 als Zeichen für 100 zu nehmen und die Hälfte davon als Zeichen für 50.*
Für 1000 war es am natürlichsten auf 1 zurückzugehen und durch Einfassung diese neue Einheit ebenso von dem gewöhnlichen 1 zu unterscheiden, wie das Zeichen für 100 von dem für 10. Die Hälfte davon gab wieder ein Zeichen für 500.
Frühzeitig jedoch – wann es geschah, vermochte ich nicht zu ermitteln – scheint die naheliegende Abkürzung der Worte centum *und* mille *für 100 das Zeichen* C *und für 1000 das Zeichen* M *aufgebracht zu haben. Ein bloßes Fortsetzen des Einfassens und Halbierens ergab die Formen für 10000, 5000, 100000 und 50000.“*
Zu erwähnen ist noch eine Eigentümlichkeit, die sich nur bei den Römern nachweisen lässt, nämlich die subtraktive Bedeutung der Zeichen für kleinere Zahlen auf der linken Seite von der nächst oder zweitnächst größeren, nämlich IV, IX, XL, XC, CD. Wie genaue Untersuchungen gezeigt haben, hat sich diese Schreibweise erst im Laufe des Mittelalters eingebürgert; interessant ist dabei, dass sich etwa das Zeichen IV erst viel später nachweisen lässt als das Zeichen XL oder XC (vgl. TEXT 2). Erklärungsversuche für diese Darstellungsweise gibt es mehrere; am wahrscheinlichsten ist, dass die Sprache durch ihr *undeviginti* u.a. diese Schreibweise nahelegte. Eine Begründung dafür bilden auch die sich in einzelnen Inschriften findenden Formen XIIX = 18, XXC = 80, IIX = 8, IXIX = 18.



Detail aus dem Sarkophag des *Giovanni di Andrea*. (14. Jh.). Bologna. Museo Civico Medievale.

Zur Entstehung und Entwicklung eines Zahlbegriffs in der Frühzeit gibt es keine direkte schriftliche Überlieferung. Lediglich die Sprachen selbst geben Hinweise. Eine sprachliche Möglichkeit, um die Anzahl von bestimmten Gegenständen benennen zu können, besteht in der Form eines über den Singular und Plural hinausgehenden grammatischen Numerus. So bezeichnet der in vielen Sprachen (Griechisch, Altindisch usw.) auftretende *Dual* die Zweiheit, im Gegensatz einerseits zur Einheit, andererseits zur Mehrheit. Es existieren sogar Sprachen, in denen neben dem Dual noch ein *Trial, Quaternal* und noch höhere Numeruskategorien vorkommen. So hängen in manchen Primitivsprachen der grammatische Numerus und das Zahlwort engstens miteinander zusammen und können prinzipiell nicht voneinander unterschieden werden. Auf bemerkenswerte Weise wird im Sumerischen und im Altägyptischen der Plural gebildet. So bedeutet im Sumerischen das Zahlwort 1 soviel wie „Mann“, das Zahlwort 2 soviel wie „Frau“, das Zahlwort 3 soviel wie „die Mehrheit“. Das Zahlzeichen für 3 bildet sowohl im Sumerischen wie auch im Altägyptischen allgemein das Pluralzeichen.
Auf andere Weise kann eine Zählung durchgeführt werden, indem man ein abstraktes Zahlwort neben das Gezählte stellt. Der Begriff der Zahl hängt dann ausschließlich am Zahlwort selbst. Dabei ist es, wie manche Sprachen zeigen, durchaus keine Selbstverständlichkeit, für die verschiedenen abzuzählenden Gegenstände jeweils dieselben Zahlwörter zu gebrauchen. Es gibt Völker, die z.B., wenn sie runde Gegenstände abzählen, andere Zahlwörter gebrauchen, als wenn sie längliche Gegenstände abzählen. Reste dieses Phänomens finden sich auch noch heute, wenn wir von einem Paar Schuhe, Zwillingen oder einem Duett sprechen. Ähnliche Beispiele liefert die Metrologie; so wurden früher die Eier in Mandeln (15 Stück), in Stiegen (20 Stück) oder in Schock (60 Stück) verkauft, aber niemand hätte damals 1 Schock Ziegel gesagt.
Ein weiterer Schritt besteht darin, dass die jeweils verwendeten Zahlwörter unabhängig sind von der Art des Gezählten; das Gezählte ist dann beliebig austauschbar, man kommt mit nur einer Art von Zahlwörtern aus. Hier wiederum werden in vielen Sprachen die Zahlwörter bis zu einer bestimmten Zahl n als mit dem gezählten Gegenstand so verbunden betrachtet, dass sie wie Adjektiva dekliniert werden. Im Griechischen, wie auch in den slawischen Sprachen, werden die Zahlwörter bis n = 4, im Lateinischen bis n = 3, im Sanskrit sogar bis n = 19 dekliniert. Doch es gibt auch Sprachen, bei denen alle Zahlwörter indeklinabel sind, z.B. das Englische; es besteht dann keine direkte grammatische Verbindung mehr zwischen dem Zahlwort und dem Gezählten.
Nach der Bildung von Zahlwörtern, die das Ohr beim Gespräch aufnahm, ergab sich bald die Notwendigkeit, die Zahlen auch für das Auge sichtbar zu machen. Dies konnte einmal geschehen durch Aufzeigen der entsprechenden Zahl von Fingern oder nach Vereinbarung bestimmter Formen von *Fingerzahlen*, ferner durch Auslegen von handlichen Gegenständen (wie Steinchen, Muscheln, Holzstäbchen). Das Fingerzählen war wie bei allen antiken Völkern, so auch bei den Römern stets in Gebrauch. Aus der Häufigkeit, vor allem auch aus der Beiläufigkeit der Erwähnungen in den antiken Texten ist der Schluss zu ziehen, dass das Fingerzählen ganz allgemein verbreitet und in allen Bevölkerungsschichten geläufig war. Dass das Fingerzählen bereits im Anfangsunterricht gelehrt wurde, geht aus einer Nachricht des Quintilian hervor: Jeder musste die Fingerzahlen beherrschen, wer sie nicht korrekt anwenden konnte, galt als *indoctus*.

nam cum sit geometria divisa in numeros atque formas, numerorum quidem notitia non oratori modo, sed cuicumque saltem primis litteris erudito necessaria est. in causis vero vel frequentissime versari solet: in quibus actor, non dico si circa summas trepidat, sed si digitorum saltem incerto aut indecoro gestu a computatione dissensit, indicatur indoctus.(inst. orat. I 10, 35)

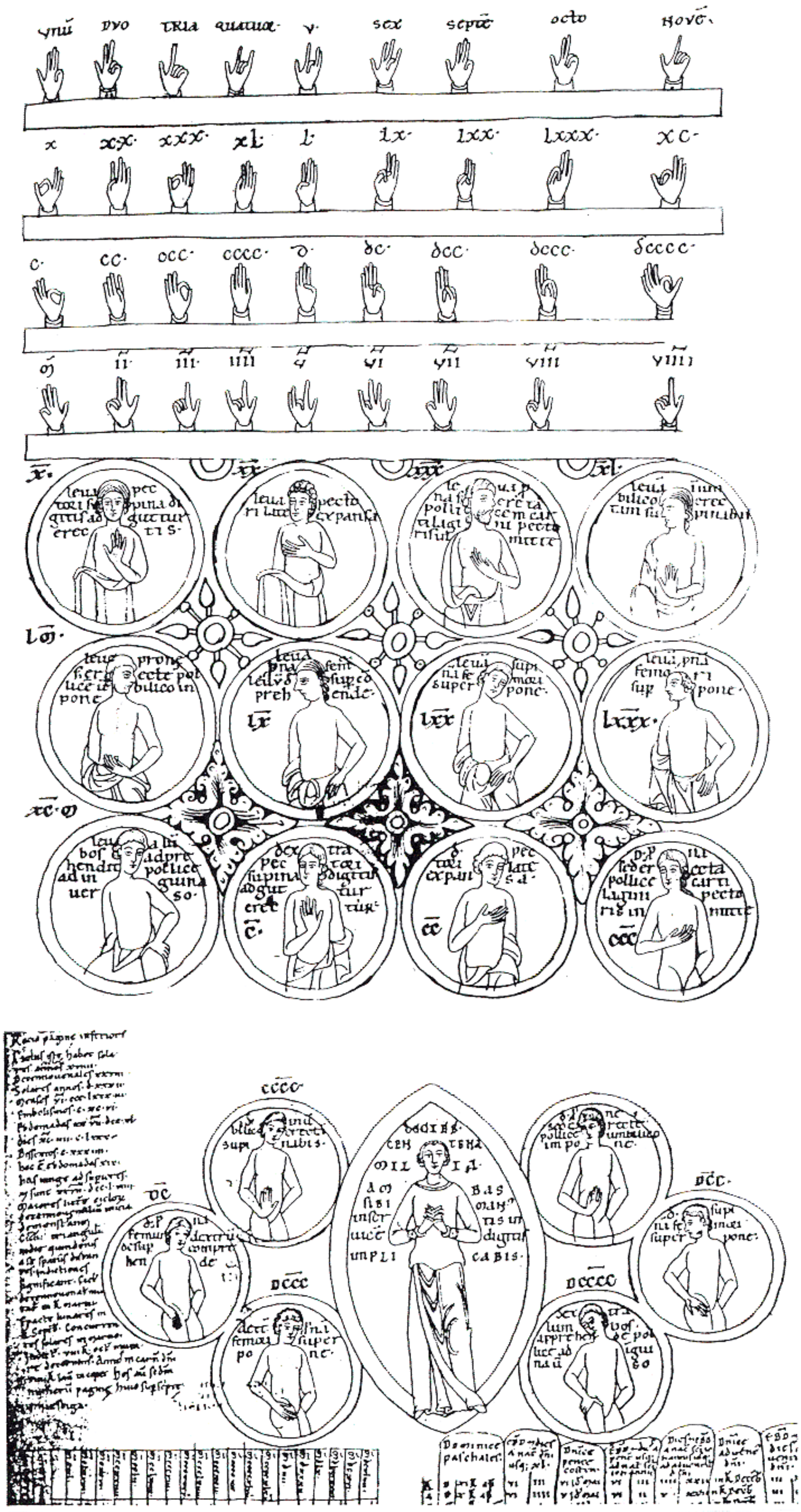
„Denn von den zwei Bereichen, in die die Geometrie sich gliedert, den Zahlen und den Figuren, ist ja die Kenntnis der Zahlen nicht nur für den Redner, sondern für jeden, der die Anfangsgründe der Bildung besitzt, notwendig. In Prozessen indessen tritt sie gewöhnlich am allerhäufigsten in Erscheinung; denn wenn in ihnen ein Sachwalter – gar nicht zu reden davon, dass er bei den Gesamtzahlen Unsicherheit zeigt – auch nur mit einer ungenauen oder unschönen Fingergebärde der Rechnung widerspricht, gilt er als ungebildet.“

Philologisch lassen sich zwei Gattungen von Quellen unterscheiden. Die Primärquellen, Erwähnungen des Zählens mit Hilfe der Finger, stammen aus allen Zeiten der römischen Epoche. Sie belegen den allgemeinen Gebrauch der Fingerzahlen, geben Beispiele für ihre Verwendung, setzen aber das System als bekannt voraus; eigentlicher Gegenstand einer Beschreibung ist das Fingerzählen hier nie. Einzelne Hinweise darauf, wie die Fingerzahlen ‚funktionierten‘, sind den Quellen mitunter zu entnehmen, wie z.B. der Bemerkung Iuvenals, der Hundertjährige könne seine Jahre schon an der rechten Hand lesen.

Felix nimirum qui tot per saecula mortem
distulit atque suos iam in dextra computat annos. (sat.10, 248 f.)

„Ja, glücklich ist, wer so oft wie er im Laufe der Zeit
trotzte dem Tod und seine Jahre schon zählt an der Rechten.“

Sekundärquellen sind die frühmittelalterlichen Texte, die das System der Fingerzahlen eingehend beschreiben.



„Die Zahlzeichen von 1 bis 300000“. Illustration zum Liber de computo des Hrabanus Maurus. Bibilioteca Vaticana. Codex Urbinus Latinus 290 fol. 31[r].

TEXT 3 Beda Venerabilis: De Temporum ratione I 1, 1ff.

Die *computatio Romana*, das „Römische Fingerrechnen", eigentlich die Darstellung der Zahlen mit den Fingern, steht am Anfang zahlreicher computistischer Schriften zur Berechnung des *ordo paschalis*, des Ostertermins. Ältester erhaltener Text ist die anonyme Schrift *Computatio Romana*, die nach A. Cordoliani (*A propos du chapitre premier du De Temporum ratione, de Bède*. Le moyen Age 54, 1948, 209–223) im Jahre 688 verfasst wurde. Der bekannteste dieser Texte ist der des **Beda Venerabilis** aus dem Jahre 725. Das Eingangskapitel *de computo vel loquela digitorum* der Schrift *De Temporum ratione* liegt auch in gesonderten Abschriften vor. Bedas Text war Vorbild für die Schriften der *computistae* der folgenden Jahrhunderte, so auch für die Schrift *liber de computo* (cap. 6) des **Hrabanus Maurus.**
Dass die in diesem Text beschriebenen Fingerzahlen mit dem in früheren Jahrhunderten verwendeten System übereinstimmten, war in der Forschung lange vermutet worden. Der Nachweis gelang vor wenigen Jahren E. Alföldi Rosenbaum (*The Finger Calculus in Antiquity and in the Middle Ages*. Frühmittelalter-Studien 6, 1971, 1ff.) durch die Untersuchung von römischen Spielsteinen mit Zahlen. Seit dem ersten Jahrhundert, ausgehend möglicherweise von Alexandria, sind im römischen Reich Spielsteine in Gebrauch, die auf der Vorderseite bildliche Darstellungen, auf der Rückseite eine in römischen Ziffern geschriebene Zahl zeigen; mitunter ist die Zahl noch durch das entsprechende griechische Zeichen ergänzt. Bislang ist unklar, zu welchem Brettspiel die Sätze von jeweils 15 Steinen gehören. Unter den bildlichen Darstellungen treten neben Masken, Musen; Eroten auch die Fingerzahlen auf; in den erhaltenen Beispielen sind sie zumeist durch jeweils eine Hand dargestellt, seltener auch durch das Brustbild eines Mannes, der die Zahl zeigt. Die komplette Abfolge der Zahlen von I bis XV konnte mit antiken Spielsteinen zusammengestellt werden. Diese stammen von unterschiedlichen Fundorten, und auch ihr Stil zeigt deutlich, dass sie die vereinzelten Reste ansonsten verlorener Sätze von Spielmarken sind. Dennoch sind sie, was den Inhalt ihrer Darstellung betrifft, im Wesentlichen einheitlich und stimmen mit der Beschreibung von Beda überein. Dies kann kein Zufall sein und wird durch die Kombination mit weiteren Quellen und Darstellungen mehr als ausreichend gestützt.

De Computo vel Loquela Digitorum

De temporum ratione, domino iuvante, dicturi necessarium duximus utilissimam primo promptissimamque flexus digitorum paucis praemonstrare sollertiam, ut cum maximam computandi facilitatem dederimus, tum paratiore legentum ingenio ad investigandam dilucidandamque computando seriem temporum veniamus. Neque enim contemnenda parvive pendenda est regula cuius omnes paene sacrae expositores scripturae, non minus quam litterarum figuras, monstrantur amplexi. Denique et multi alii alias, et ipse divinae interpres historiae Hieronimus in evangelicae tractatu sententiae, huius adiumentum disciplinae non dubitavit assumere (adv. Iouin I.): *Centesimus*, inquit, *et sexagesimus et tricesimus fructus, quamquam de una terra et de una semente nascatur, tamen multum differt in numero. Triginta referuntur ad nuptias: nam et ipsa digitorum coniunctio et, quasi molli osculo se complectens et foederans, maritum pingit et coniugem. Sexaginta ad viduas: eo quod in angustia et tribulatione sint positae; unde et in superiore digito deprimuntur, quantoque maior est difficultas expertae quondam voluntatis illecebras abstinere, tanto maius et praemium. Porro centesimus numerus – quaeso, diligenter lector, attende – a sinistra transfertur ad dexteram et, hisdem quidem digitis, sed non eadem manu, quibus in laeva manu nuptae significantur et viduae, circulum faciens exprimit virginitatis coronam.*
Tres digiti in sinistra manu, id est auricularis medicus impudicus, usque ad nonum continent numerum. Cum ergo dicis unum, minimum in laeva digitum inflectens in medium palmae artum infiges. Cum dicis duo, secundum a minimo flexum, ibidem impones. Cum dicis tria, tertium similiter adflectes. Cum dicis quattuor, itidem minimum

Vom Fingerzählen

Ehe wir mit Gottes Beistand über die Zeitrechnung sprechen, halten wir es für nötig, zuerst kurz die äußerst nützliche und stets verfügbare Fertigkeit der Fingerzahlen vorzustellen, um dann, wenn wir die Geläufigkeit im Rechnen vervollkommnet haben, mit größerer Motivation der Leser zu unserem Thema zu kommen, nämlich den Ablauf der Zeit zu erforschen und mit den Mitteln der Mathematik zu erklären. Die Kenntnis der Fingerzahlen, die ebenso wie die Buchstaben zu beherrschen von beinahe allen Kommentatoren der Hl. Schrift gefordert wird, darf nämlich weder verachtet noch geringgeschätzt werden. Dies bestätigt neben vielen anderen an anderen Stellen Hieronymus, der Übersetzer der Hl. Schrift, in seinem Kommentar zum Evangelium, wenn er nicht zögerte als Hilfe zum Verständnis dieser Thematik anzuführen:: „*Wohl entspringen die 100. und die 60. und die 30. Frucht aus derselben Erde und aus dem gleichen Samen, aber trotzdem unterscheiden sie sich sehr nach ihrer Zahlengestalt. Dreißig ist das Sinnbild der Vermählung: denn diese Vereinigung der Finger, die sich wie in einem süßen Kuß umfangen, stellen Mann und Frau dar. Sechzig aber bezieht sich auf die Witwen deswegen, weil sie schweren Anfechtungen ausgesetzt sind, durch die sie bedrückt werden, gleichsam wie der Daumen von dem darüberliegenden Zeigefinger (bei der Zahl 60). Aber so schwer es ist, den Lockungen der einst genossenen Freuden zu widerstehen, so groß ist dann auch der Lohn. Nun, lieber Leser, beachte sorgfältig, dass die Zahl 100 von der linken Hand auf die rechte übergeht und dort wohl von denselben Fingern, nicht aber von derselben Hand gebildet wird, die an der linken Hand die Vermählung und die Witwen versinnbildlichen. Hier bedeutet der von ihnen gebildete Kreis die Krone der Jungfräulichkeit.*"
Drei Finger der Linken, also Kleiner, Ring- und Mittelfinger, ermöglichen die Zahlen bis 9. Sagst du eins, so musst du an der linken Hand den kleinen Finger beugen und sein Endglied auf die Handfläche legen; bei zwei musst du den Ringfinger daneben legen; bei drei entsprechend den Mittelfinger; bei vier musst du den Kleinen Finger

levabis. Cum dicis quinque, secundum a minimo similiter eriges. Cum dicis sex, tertium nihilominus elevabis, medio dumtaxat solo, qui medicus appellatur, in medium palmae fixo. Cum dicis septem, minimum solum, ceteris interim levatis, super palmae radicem pones. Iuxta quem cum dicis octo, medicum. Cum dicis novem, impudicum e regione compones.

wieder aufrichten; bei fünf ebenso den Ringfinger; bei sechs musst du wohl den Mittelfinger strecken, aber dann den Ringfinger, der Medicus heißt, allein wieder auf die Handfläche beugen. Bei sieben strecke alle Finger und beuge nur den Kleinen Finger über die Handwurzel; bei acht lege den Ringfinger daneben; bei neun lege den ‚unkeuschen' (Mittel-)Finger daneben.

Duo digiti in sinistra manu, id est index et pollex, usque ad nonagesimum convenit numerum. Cum dicis decem, unguem indicis in medio figes artu pollicis. Cum dicis viginti, summitatem pollicis inter medios indicis et impudici artus immittes. Cum dicis triginta, ungues indicis et pollicis blando coniunges amplexu. Cum dicis quadraginta, interiora pollicis lateri vel dorso indicis superduces, ambobus dumtaxat erectis. Cum dicis quinquaginta, pollicem exteriore artu instar Γ litterae curvatum ad palmam inclinabis. Cum dicis sexaginta, pollicem ut supra curvatum indice circumflexo diligenter a fronte praecinges. Cum dicis septuaginta, indicem ut supra circumflexum pollice immisso superimplebis, ungue dumtaxat illius erecto trans medium indicis artum. Cum dicis octoginta, indicem ut supra circumflexum pollice in longum tenso implebis, ungue videlicet illius in medium indicis artum infixo. Cum dicis nonaginta, indicis inflexi unguem radici pollicis erecti infiges. Hactenus in laeva.

Zwei Zahlen der Linken, also Zeigefinger und Daumen, ermöglichen die Zahlen bis 90. Wenn du 10 sagst, musst du den Nagel des Zeigefingers auf die Mitte des Daumen stellen. Bei 20 lege die Daumenspitze zwischen Zeige- und Mittelfinger. Bei 30 vereine die Nägel des Zeigefingers und des Daumens in lieblicher Rundung. Bei 40 lege den Daumen an die Seite oder auf den Rücken des Zeigefingers und strecke nun beide. Bei 50 beuge das Endglied des Daumens nach innen wie ein griechisches Γ. Bei 60 lege über den wie eben gebeugten Daumen die Zeigefingerspitze. Bei 70 lege in den wie eben gebeugten Zeigefinger den Daumen, so dass sein Nagel das Mittelglied des Zeigefingers berührt. Auch so: Setze die Spitze des Daumens in das Mittelglied des Zeigefingers und schlage diesen darüber. Bei 80 fülle den wie eben umgebeugten Zeigefinger mit dem ausgestreckten Daumen, so dass dessen Nagel den Zeigefinger mit der Oberseite berührt. Bei 90 lege den Zeigefinger an die Daumen-Wurzel. Soweit die Linke.

Tres in dextera manu digiti, id est auricularis medicus et impudicus, usque ad VIIII continent. Centum vero in dextera, quomodo decem in laeva, facies. Ducenta in dextera, quomodo viginti in laeva; trecenta in dextera, quemadmodum triginta in laeva; eodem modo et cetera usque ad DCCCC. Item mille in dextera, quomodo unum in laeva; duo milia in dextera, quomodo duo in laeva; tria milia in dextera, quemadmodum tria in laeva, et cetera usque ad novem milia.

Bei der Rechten ermöglichen 3 Finger, das heißt der Kleine, der Ring- und der Mittelfinger, die Zahlen bis 9000. 100 nun erhältst du mit der Rechten wie 10 mit der Linken; 200 mit der Rechten wie 20 mit der Linken; 300 mit der Rechten wie 30 mit der Linken. Ebenso die übrigen bis 900. 1000 schließlich mit der Rechten wie 1 mit der Linken, 2000 mit der Rechten wie 2 mit der Linken, 3000 mit der Rechten wie 3 mit der Linken und so weiter bis 9000.

Porro decem milia cum dicis, laevam medio pectori supinam appones, digitis tamen ad collum erectis. Viginti milia cum dicis, eandem pectori expansam late superpones. Triginta milia cum dicis, eadem prona, sed erecta pollicem cartilagini medii pectoris immittes. Quadraginta milia cum dicis, eandem in umbilico erectam supinabis. Quinquaginta milia cum dicis, eiusdem pronae, sed erectae pollicem umbilico impones. Sexaginta milia cum dicis, eadem prona femur laevum desuper comprehendes. Septuaginta milia cum dicis, eandem supinam femori superpones. Octoginta milia cum dicis, eandem pronam femori superpones. Nonaginta milia cum dicis, eadem lumbos apprehendes, pollice ad inguina verso.

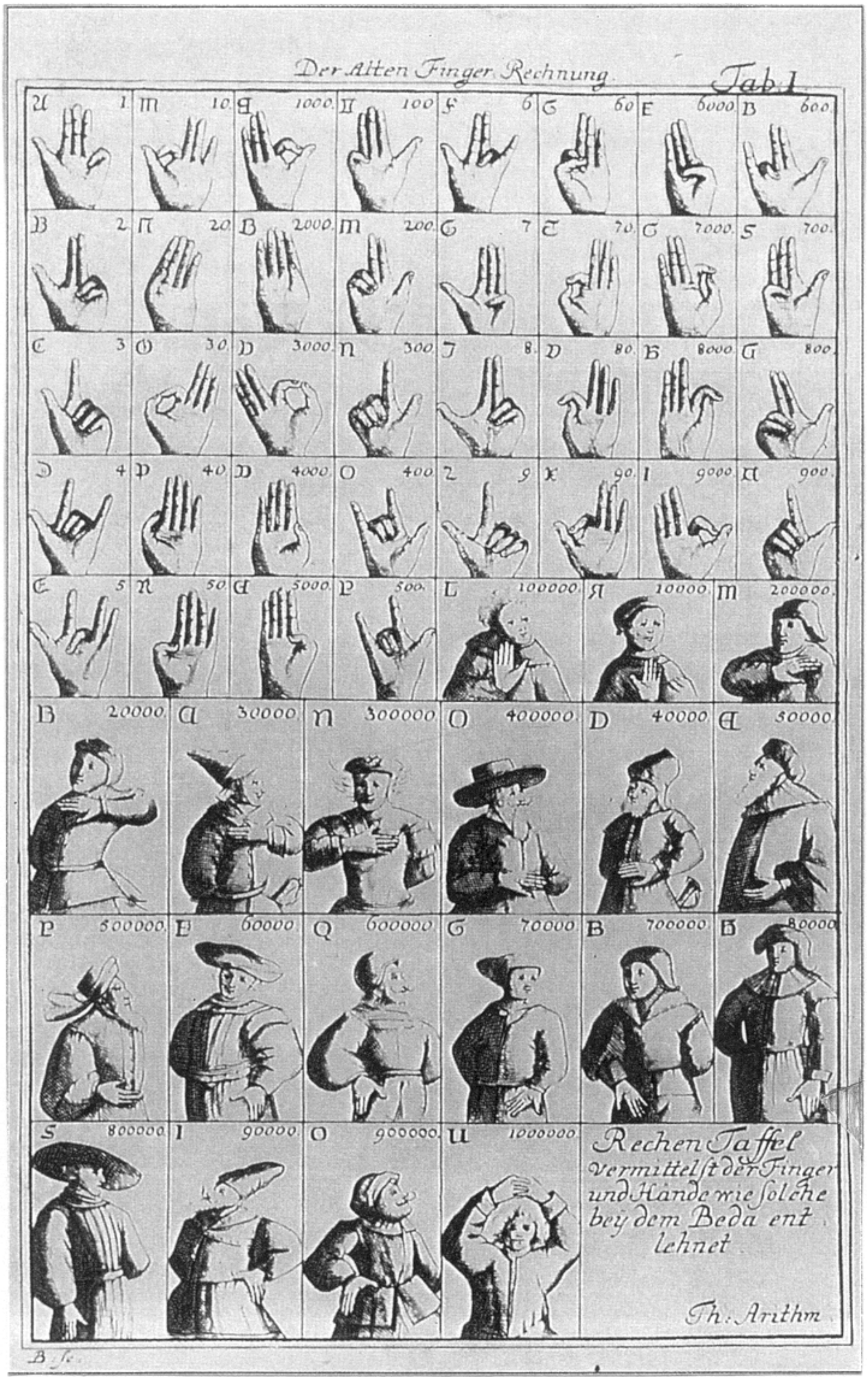
Bei 10000 dann legst du die Linke mit aufwärts gewandter Handfläche und nach oben gestreckten Fingern vor die Brust. Bei 20000 lege sie weit ausgespannt auf die Brust. Bei 30000 lege sie abwärts gewandt, aber mit aufgerichtetem Daumen auf das Brustbein. Bei 40000 lege sie mit aufgerichteten Fingern und nach oben offen auf den Bauch. Bei 50000 lege sie abwärts gewandt, aber mit aufgerichtetem Daumen auf den Bauch. Bei 60000 ergreifst du mit der abwärts gewandten Linken die obere Hälfte des linken Oberschenkels. Bei 70000 lege sie nach oben gewandt auf den Oberschenkel. Bei 80000 lege sie abwärts gewandt auf den Oberschenkel. Bei 90000 ergreifst du die Lenden, während der Daumen zur Leistengegend zeigt.

At vero C milia et CC milia et cetera usque ad DCCCC milia eodem quo diximus ordine in dextera corporis parte complebis. Decies autem centena milia cum dicis, ambas sibi manus insertis invicem digitis implicabis.

100000, 200000 und so weiter bis 900000 führe in der oben genannten Weise auf der rechten Körperhälfte aus. Bei 1 Million füge beide Hände mit verschränkten Fingern zusammen.

Römische Fingerzahlen (Text 4)

Aus den frühmittelalterlichen Texten lässt sich das System der Fingerzahlen exakt rekonstruieren. Kleiner, Ring- und Mittelfinger der linken Hand zeigen die Einer an. Das Anzeigen geschieht durch mehr oder minder starkes Einbiegen einzelner oder mehrerer Finger, gestreckte Finger zählen nicht. Zu Beginn der Sequenz – also bei 1,2,3 – werden die Finger, beim Kleinen beginnend, so umgebogen, dass das untere Fingerglied aufrecht bleibt. Bei 4 und 5 werden der Kleine bzw. der Ringfinger gehoben; bei 6 wird der Mittelfinger gehoben, dafür



Darstellung der Fingerzahlen in einem Lehrbuch der Mathematik aus dem Jahr 1727. vgl. Karl Menninger. Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl. 2. Aufl. Göttingen 1958. Bd. 2. S. 10.

der Ringfinger eingeschlagen. 7, 8 und 9 werden durch Einschlagen der Finger wie 1, 2, 3 gebildet, nur dass nun die Fingerspitze im unteren Teil der Handfläche liegt. Beim Ausprobieren stellt sich heraus, dass diese Abfolge eine innere Logik besitzt, während in der Zehnerfolge – mit Daumen und Zeigefinger der linken Hand gebildet – nicht jedes Zeichen aus dem vorigen entwickelt ist; vielmehr sind hier Fingerstellungen unterschiedlicher Art gewählt. Da sie sich bei aufeinanderfolgenden Zahlen ähneln – 60, 70, 80 –, ist ihre Darstellung in den Handschriftenillustrationen oft unklar und möglicherweise später variiert worden. Bei 50 liegt der Daumen scharf abgewinkelt an der Handfläche, für die Zahl 60 wird der in dieser Stellung unveränderte Daumen vom Zeigefinger bedeckt. Der Daumen schiebt sich zur Darstellung von 70 in derselben Haltung nach außen, bis sein Nagel unter dem Zeigefinger liegt. bei 80 wird der Daumen gestreckt und hebt so den gebogenen Zeigefinger an. Mit der rechten Hand werden Hunderter und Tausender angegeben. Daumen und Zeigefinger markieren die Hunderter, die drei übrigen Finger die Tausender, und zwar jeweils mit den Zeichen, wie sie für Zehner und Einer an der linken Hand gelten. Diese Zeichen können zur Darstellung jeder beliebigen Zahl zwischen 1 und 9999 verwendet werden.
Anders verhält es sich mit den Gesten für die höheren Zahlen. Sie lassen sich nicht miteinander oder mit den niedrigeren Zahlen kombinieren, denn sie verlangen z.T. eine bestimmte Daumenstellung oder Wendung der Hand. Ihren Gebrauch kann man sich also nur so vorstellen, dass sie nacheinander statt gleichzeitig ausgeführt werden mussten. Es ist zu überlegen, ob dieser Teil des Systems nicht als artifizielle Erweiterung eines ursprünglich geschlossenen – wenn auch auf 9999 begrenzten – Aufbaus von Zahlzeichen entstanden ist.

L(ucius) CALIDIUS EROTICUS
SIBI ET FANNIAE VOLUPTATI V(ivus) F(ecit)
COPO COMPUTEMUS HABES VINI I PANE(m)
A(ssem) I PULMENTAR(ium) A(sses) II CONVENIT PUELL(am) A(sses)VIII ET HOC CONVENIT FAENUM
MULO A(sses) II ISTE MULUS ME AD FACTUM DABIT

„Lucius Calidius Eroticus hat (das Grabmal) für sich und Fannia Voluptas zu Lebzeiten gemacht. Wirt(in), wir wollen abrechnen! Du hast einen Schoppen Wein, Brot für ein As, Fleischbeilage für zwei Asse. In Ordnung. Das Mädchen für 8 Asse. Auch das ist in Ordnung. Hafer für das Maultier 2 Asse. Dieses Maultier wird mich in den Ruin treiben!“

Grabrelief aus Isernia (CIL IX 2689) Paris, Louvre.

Mit diesem Relief liegt das einzige Beispiel vor, in dem Inschrift und Bild eine Abrechnung mit den Fingern zum Thema haben: nur so ist *Copo, computemus* zu verstehen. Dass die Darstellung Fingerzählen zeigt, ist von mehreren Bearbeitern bemerkt worden. Der Reisende im Kapuzenmantel streckt der Wirtin die linke Hand entgegen. Die genaue Stellung der Finger ist nicht mehr auszumachen. Deutlich ist, dass er Daumen und Zeigefinger ringförmig verbindet. Sollte in der Darstellung eine exakte, an der Rechnung der Inschrift zu überprüfende Zahl wiedergegeben gewesen sein, käme nur eine Zahl über 10 und unter 20 in Frage, bei der der Zeigefinger unter dem obersten Daumenglied ruht. Die Haltung der übrigen Finger ist nicht zu erkennen. Sein Gegenüber, die Wirtin, streckt die rechte Hand vor. Will man einen Bezug zur Rechnung der Inschrift postulieren, wäre bei der geringen Höhe der Zahlen eher die linke Hand korrekt. Die Hand der Frau ist stark gespreizt. Spreizung und Lücke zwischen den Fingern kann bei den Einern ‚vier‘ bedeuten. Jedoch lässt sich die Zahl nicht sicher identifizieren.

Die Notwendigkeit, größere Zahlen als Zehn darzustellen, führte bei den Römern neben dem Gebrauch von Zahlzeichen und der Darstellung durch bestimmte Fingerstellungen auch zur Anwendung von Recheninstrumenten. Dabei verwendete man einen durch Linien oder Kolumnen eingeteilten Tisch, den sogenannten *Abakus*. Dass dieser bereits den Griechen bekannt war, zeigt der unten abgebildete Ausschnitt des sogenannten *Darius-Kraters* (2. Hälfte d. 4.Jh.v.Chr.). Die Römer verwendeten zwei Arten des *abacus*, die eine, bei welcher Knöpfchen in Einschnitten verschiebbar waren, die andere, bei welcher Rechensteine, *calculi,* aufgelegt wurden. Diese zweite Art liegt auch den frühmittelalterlichen Schriften der Abazisten zugrunde, denen der folgende Text zuzuordnen ist.

Die sogenannte *Dariusvase (*2. Hälfte des 4. Jh.v.Chr.). Museo Nazionale. Neapel. (Ausschnitt). In der untersten Figurenreihe ist ein Schatzmeister dargestellt, der vor einem Zahltisch sitzt und ein Kassabuch in Händen hält. Auf dem Tisch sind die griechischen (herodianischen) Zahlzeichen für 10000, 1000, 100, 10, 5, 1, ½ und ¼ abgebildet.

TEXT 4 Geometria Euclidis a Boetio in Latinum translata I 15,1–23,8 (Folkerts) (gek.)

Zu den für die Entwicklung der Mathematik im Mittelalter wichtigsten Texten zählen zwei Werke mit dem Titel *geometria*, als deren Autor **Boethius** (480–524 n.Chr.) genannt wird. Dies ist, wie wir heute wissen, falsch. Beide Schriften sind Werke anonymer Verfasser des 11. oder 12. Jahrhunderts. Genauer untersucht ist bis jetzt nur die sogenannte *geometria II;* sie ist für die Wissenschaft deshalb so interessant, da es sich dabei um das älteste lateinisch geschriebene Werk handelt, in dem arabische Ziffern dargestellt sind.
Der Autor dieser Schrift, die wahrscheinlich im 11. Jahrhundert verfasst wurde, versuchte mit allen Mitteln, sein Werk als Werk des *Boethius* erscheinen zu lassen. Deshalb gibt er als Erfinder des Abakus **Archytas** an, einen berühmten tarentinischen Mathematiker des 4. vorchristlichen Jahrhunderts. In Wirklichkeit war der Erfinder der hier vorgestellten Rechentechnik **Gerbert v. Aurillac** (945–1003 n.Chr), der spätere Papst Sylvester II. Diese Verfälschungen führten dazu, dass bis ins 19. Jahrhundert Stand der Wissenschaft war, dass unsere Ziffern von den Pythagoräern entwickelt oder aus dem Osten (Indien) übernommen wurden und bereits im 5. Jahrhundert n. Chr in Westeuropa bekannt waren. Erst dadurch, dass dieses Werk als Kompilat mathematischer Schriften des 10 Jahrhunderts erkannt wurde, konnte der Weg unserer Ziffern von Indien über die Araber nach Spanien und von dort durch die Vermittlung Gerberts v. Aurillac nach Italien und Westeuropa widerspruchsfrei nachverfolgt werden.

Urkunde des Königs Devendravarman aus Kalinga (heute Orissa in Ostindien) aus dem Jahr 596 n.Chr. Es handelt sich dabei um das älteste Zeugnis der Stellenwertschrift mit der Null. Die letzten drei Zeichen der letzten Zeile stellen die Zahl 346 dar.

Der vorliegende Text ist ein charakteristisches Beispiel für die Schriften der Abazisten des 10 bis 12. Jahrhunderts. Basierend auf Gerberts Schrift *regulae de numerorum abaci rationibus* stellt der Autor verschiedene Rechenregeln für Multiplikation und Division auf dem Abakus auf. Allerdings sind diese Regeln so lückenhaft und bar jedes mathematischen Verständnisses, dass sie ohne Kenntnis anderer, ausführlicher verfasster Texte unverständlich bleiben.
In fast allen Handschriften befindet sich vor dem Text der Rechenregeln eine Tafel des Abakus, deren Gestalt in den einzelnen Codices etwas variiert. Es handelt sich um eine rechteckige Figur mit 6–11 waagrechten und 9–13 senkrechten Reihen. In der ersten Zeile stehen die den Abazisten geläufigen Bezeichnungen der Ziffern: *igin* (= 1), *andras* (= 2), *ormis* (= 3), *arbas* (= 4), *quimas* (= 5), *calctis* (= 6), *zenis* (= 7), *temenias* (= 8), *celentis* (= 9) und *sipos*. In der zweiten Zeile des Abakus sind die dazugehörigen Zahlzeichen von 1 bis 9 eingetragen, Abarten der indisch-arabischen Ziffern, die man in gleicher Gestalt auch im Text findet. Diese Zeichen waren auf Rechensteinen (*apices, caracteres*) vermerkt, die zwischen die senkrechten Linien des Abakus gelegt wurden; die Spalte, in der sie lagen, bezeichnete den Stellenwert der betreffenden Ziffer. Im Gegensatz zum Text befindet sich auf der Abakustafel noch ein zehntes Zeichen für den *sipos;* es ist ein Kreis, in den meistens ein Dreieck oder der Buchstabe *a* eingezeichnet wurde. Die Abazisten des 11. Jahrhunderts kannten den Gebrauch des ungenutzten runden Steines, den sie *rotula* nannten und den sie als Merkzeichen benutzten oder den sie in eine leere Kolumne setzten. Es handelte sich bei diesem Zeichen allerdings nicht um ein Zahlzeichen für die Null. Rechnungen mit Null sind in Europa erst ab dem 12. Jahrhundert nachweisbar. Bei dem eingeschriebenen Dreieck handelt es sich vielleicht um ein Loch, durch das die Steine zur Aufbewahrung auf einer Schnur gereiht wurden. In die dritte Zeile der Abakustafel sind von rechts nach links die römischen Zahlen von 1, 10, 100, ... bis 100000000000 eingetragen. Nur diese Reihe ist für das Rechnen auf dem Abakus mit Kolumnen unbedingt notwendig, da die auf ihr stehenden Zahlen den Stellenwert der *apices* angeben, die in der betreffenden Spalte liegen. Dieser Text ist somit aus mehreren Gründen für die Geschichte der Mathematik wichtig: Wegen des erstmaligen Auftauchens der arabischen Ziffern und ihrer Namen, wegen der Darstellung und Beschreibung des Abakus und wegen der, wenn auch teilweise unverständlich formulierten Rechenregeln für Multiplikation und Division.

Sed iam tempus est ad geometricalis mensae traditionem ab Archita, non sordido huius disciplinae auctore, Latio accommodatam venire, si prius praemisero, quot sint genera angulorum et linearum, et pauca fuero praelocutus de summitatibus et extremitatibus. [...]
Nosse autem huius artis dispicientem, quid sint digiti, quid articuli, quid compositi, quid

Aber es ist nun Zeit auf den Gebrauch des Rechentisches einzugehen, der von Archytas, einem bedeutenden Kenner dieser Technik, römischen Vorstellungen angepasst worden war. Zuvor erwähne ich noch, welche Arten von Winkeln und Linien es gibt, und spreche ein wenig über Flächen und Körper. [...]
Es ist notwendig, dass jemand, der sich mit dieser Wissenschaft auseinandersetzt, weiß, was *digiti, articuli*, zusammengesetzte und nicht zusammengesetzte

incompositi numeri, quid multiplicatores quidve divisores, ad huius formae speculationem, quam sumus tradituri, oportet.
Digitos vero, quoscumque infra primum limitem, id est omnes, quos ab unitate usque ad denariam summam numeramus, veteres appellare consueverunt. Articuli autem omnes a deceno in ordine positi et in infinitum progressi nuncupantur. Compositi quippe numeri sunt omnes a primo limite, id est a decem, usque ad secundum limitem, id est viginti, ceterique sese in ordine sequentes exceptis limitibus. Incompositi autem sunt digiti omnes annumeratis etiam omnibus limitibus. Multiplicatores igitur numeri mutua in semet replicatione volvuntur, id est interdum maior minoris, interdum autem minor maioris multiplicator existit, interdum vero numerus in se excrescens multiplicationis augmenta suscipit. Divisores autem maiorum semper minores constituuntur numeri.

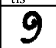
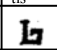
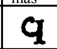
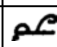
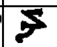
Zahlen, was Multiplikatoren und Divisoren sind, wenn er die Rechentechnik studiert, die wir weitergeben. In früheren Zeiten nannte man gewöhnlich *digiti* alle Zahlen unterhalb der ersten Rechenlinie, das heiß alle, die wir von 1 bis 10 zählen; *articuli* werden aber alle von 10 in der entsprechenden Reihenfolge bis unendlich genannt. Zusammengesetzte Zahlen sind alle zwischen erster und zweiter Rechenlinie, das heißt von 10 bis 20, und alle übrigen, die sich in natürlicher Reihenfolge anschließen, ausgenommen die Zahlen auf den Rechenlinien. Nicht zusammengesetzte Zahlen heißen alle *digiti*, sowie alle Zahlen, die auf den Rechenlinien stehen. Multiplikatoren sind Zahlen, die in wechselseitiger Anordnung zueinander gesetzt werden, das heißt bisweilen erscheint die größere als Multiplikator der kleineren, bisweilen die kleinere als Multiplikator der größeren, manchmal bewirkt eine Zahl eine Vermehrung durch Multiplikation mit sich selbst. Als Divisor wird aber immer die kleinere von zwei verschiedenen Zahlen bestimmt.

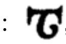
Priscae igitur prudentiae viri Pytagoreum dogma secuti Platonicaeque auctoritatis investigatores speculatoresque curiosi totum philosophiae culmen in numerorum vi constituerunt. Quis enim musicarum modulamina simphoniarum numerorum expers censendo pernoscat? Quis ipsius firmamenti siderea corpora stellis compacta naturae numerorum ignarus deprehendat ortusque signorum et occasus colligat? De arithmetica vero et geometrica quid attinet dicere, cum, si vis numerorum pereat, nec in nominando appareant? De quibus quia in arithmeticis et musicis sat dictum est, ad dicenda revertamur.

Die Vertreter der älteren Wissenschaft, die der Lehre des Pythagoras folgten, sowie die Schüler und eifrigen Vertreter der platonischen Lehre bestimmten, dass der Kern jeder Philosophie auf der Kraft der Zahlen beruhe. Denn wer könnte die Modulation musikalischen Zusammenspiels ohne Kenntnis der Zahlen unterscheiden und erfassen? Wer könnte ohne Wissen um das Wesen der Zahlen die aus Sternen gebildeten Formationen am Himmel begreifen, den Auf- und Untergang der Gestirne erklären? Wie könnte man über Arithmetik und Geometrie reden, da ihre Bedeutung, wenn die Kraft der Zahlen fehlt, aus ihrem Namen nicht ersichtlich ist? Da darüber aber in den Schriften über Arithmetik und Musik genug gesagt wurde, wollen wir zu unserem eigentlichen Thema zurückkehren.

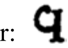
Pytagorici vero, ne in multiplicationibus et partitionibus et in podismis aliquando fallerentur, ut in omnibus erant ingeniosissimi et subtilissimi, descripserunt sibi quandam formulam, quam ob honorem sui praeceptoris mensam Pytagoream nominabant, quia hoc, quod depinxerant, magistro praemonstrante cognoverant – a posterioribus appellabatur abacus –, ut, quod alta mente conceperant, melius si quasi videndo ostenderent, in notitiam omnium transfundere possent, eamque subterius habita sat mira descriptione formabant.

Um sich bei Multiplikationen, Divisionen und Flächenberechnungen nicht zu irren, legten die Pythagoräer, sie waren nämlich von allen die scharfsinnigsten und erfindungsreichsten, eine bestimmte Tabelle an; diese nannten sie aus Verehrung ihres Meisters *mensa Pytagorea*, weil sie das, was sie aufgezeichnet hatten, durch das Vorzeigen ihres Lehrers gelernt hatten – von den Nachfolgern wurde diese Tabelle *abacus* genannt-; dies machten sie, um das, was sie durch intensives Überlegen erkannt hatten, besser der Allgemeinheit vermitteln zu können, wenn sie es gewissermaßen sichtbar darstellen könnten und gaben ihr die unten abgebildete eigenartige Form.

sipos	celen tis	teme nias	zenis	calc- tis	qui- mas	arbas	ormis	an- dras	igin
									**I**
$\overline{\mathrm{IMI}}$	C$\overline{\mathrm{MI}}$	X$\overline{\mathrm{MI}}$	$\overline{\mathrm{MI}}$	$\overline{\mathrm{C}}$	$\overline{\mathrm{X}}$	$\overline{\mathrm{I}}$	C	X	I

Superius vero digestae descriptionis formula hoc modo utebantur. Habebant enim diverse formatos apices vel caracteres. Quidam enim huiuscemodi apicum notas sibi conscripserant, ut haec notula responderet unitati: **1** , ista autem binario: , tertia vero tribus:  , quarta autem quaternario:

Die oben abgebildete Tabelle verwendeten sie auf folgende Weise. Sie hatten nämlich verschieden geformte Rechensteine, *apices* oder *caracteres* genannt. Einige hatten diese Rechensteine so gekennzeichnet, dass das Zeichen 1 der Zahl Eins entsprach, 2 der Zahl Zwei,

 , haec autem quinque ascriberetur:  , ista autem senario:  , septima autem septenario conveniret:  , haec vero octo:  , ista autem novenario iungeretur:  .

Quidam vero in huius formae depictione litteras alfabeti sibi assumebant hoc pacto, ut littera, quae esset prima, unitati, secunda binario, tertia ternario, ceteraeque in ordine naturali numero responderent naturali. Alii autem in huiusmodi opus apices naturali numero insignitos et inscriptos tantummodo sortiti sunt.

Hos etenim apices ita varie ceu pulverem dispergere in multiplicando et in dividendo consuerunt, ut si sub unitate naturalis numeri ordinem, iam dictos caracteres adiungendo, locarent, non alii quam digiti nascerentur. Primum autem numerum, id est binarium – unitas enim, ut in arithmeticis est dictum, numerus non est, sed fons et origo numerorum, sub linea X inscripta ponentes XX et ternarium XXX et quaternarium XL ceterosque in ordine sese sequentes proprias secundum denominationes assignare constituerunt. Sub linea vero centeno insignita numero eosdem apices ponentes binarium CC, ternarium CCC, quaternarium CCCC ceterosque ceteris denominationibus respondere decreverunt. In sequentibus vero paginularum lineis idem facientes nullo erroris nubilo obtenebrabantur.

Scire autem oportet et diligenti examinatione discutere in multiplicando et partiendo, cui paginulae digiti et cui articuli sint adiungendi. Nam singularis multiplicator deceni digitos in decenis, articulos in centenis, idem vero singularis multiplicator centeni digitos in centenis, articulos in millenis, et multiplicator milleni digitos in millenis et articulos in decenis millenis, et multiplicator centeni milleni digitos in centenis millenis, articulos autem in millenis milibus habebit. Decenus autem suimet ipsius multiplicator digitos in pagina C inscripta, articulos in millenis, et multiplicator centeni digitos in millenis et articulos in X, et multiplicator milleni digitos in X et articulos in CM, et multiplicator centeni milleni digitos in millenis milibus et articulos in XMI habebit. Centenus vero aeque suimet ipsius multiplicator digitos in X et articulos in C, et millenum multiplicans digitos in C et articulos in XC, et centenum millenum multiplicans digitos in XMI et articulos in CMI, et decenum millenum multiplicans digitos in MI et articulos in XMI subtendet. Millenus itidem se ipsum multiplicans digitos in XC et articulos in CC, et centeni milleni multiplicator digitos in CMI et articulos in MMI, et decenum millenum excrescere faciens digitos in XMI et articulos in CMI habere dinoscetur. Decenus autem millenus multiplicator centeni milleni digitos in MMI et articulos in XMI, seque

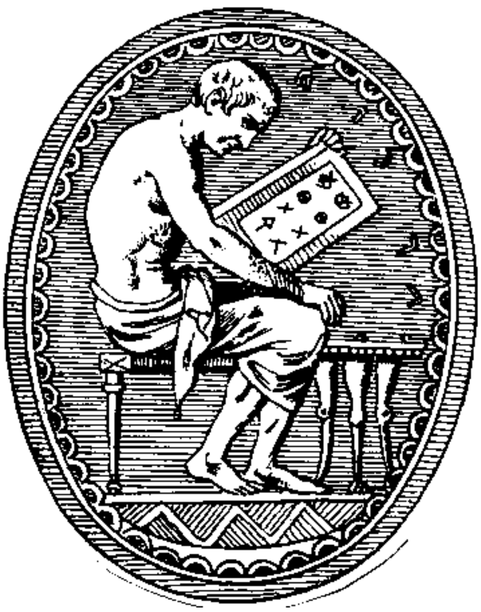
3 der Zahl Drei, 4 der Zahl Vier, 5 der Zahl Fünf, 6 der Zahl Sechs, 7 der Zahl Sieben, 8 der Zahl Acht und 9 der Zahl Neun gleichgesetzt wurde.

Andere aber nahmen bei der Beschriftung dieser Rechensteine die Buchstaben des Alphabets zu Hilfe und zwar so, dass der erste Buchstabe der Zahl Eins, der zweite der Zahl Zwei, der dritte der Zahl Drei und die Übrigen in natürlicher Reihenfolge der jeweiligen natürlichen Zahl entsprachen. Andere verwendeten für diese Aufgabe nur Rechensteine, die auf die übliche Art beschriftet waren.

Diese Rechensteine pflegten sie beim Multiplizieren und Dividieren so abwechselnd wie den Sand auf der Tabelle zu verteilen und zwar so, dass die Rechensteine, die sie in die Einerspalte legten und die in der vorhin erwähnten Weise entsprechend der natürlichen Zahlenordnung gekennzeichnet waren, keine anderen Zahlen als einstellige Zahlen darstellten. Wenn sie aber den Stein mit der Marke der ersten Zahl, das heißt 2 – die Eins ist nämlich, wie in der Arithmetik erklärt wurde, selbst keine Zahl, aber Quelle und Ursprung der Zahlen – in die mit X bezeichnete Spalte legten, dann sollte dieser die Zahl 20 bezeichnen und der Stein mit der Marke 3 die Zahl 30 und der mit der Marke 4 die Zahl 40 und so auch die Übrigen, die in natürlicher Ordnung folgten und entsprechend bezeichnet waren. Wenn sie dieselben Rechensteine in die mit C bezeichnete Spalte legten, so sollte die Marke 2 200. die Marke 3 300, die Marke 4 400 und die übrigen mit ihren Markierungen die entsprechenden Zahlen bezeichnen. Bei den folgenden Spalten machten sie dasselbe und ließen sich durch keinen Fehler verwirren.

Es ist aber unerlässlich zu wissen und durch gewissenhaftes Üben zu schulen, in welche Spalte die Steinchen der ersten und die der zweiten Spalte beim Multiplizieren und Dividieren kommen. Der Multiplikator 10 wird die Steinchen der ersten Spalte, die *digiti*, der zweiten, die der zweiten Spalte, die *articuli*, der dritten Spalte zuordnen, der Multiplikator 100 wird die *digiti* der dritten und die *articuli* der vierten Spalte zuordnen, der Multiplikator 1000 wird die *digiti* der vierten, die *articuli* der fünften Spalte zuordnen, der Multiplikator 10000 wird die *digiti* der sechsten, die *articuli* der siebten Spalte zuordnen. 10 multipliziert mit sich selbst wird die *digiti* der dritten, die *articuli* der vierten Spalte zuweisen, 10 multipliziert mit 100 wird die *digiti* der vierten, die *articuli* der fünften Spalte zuweisen, 10 multipliziert mit 1000 wird die *digiti* der fünften und die *articuli* der sechsten Spalte zuweisen, 10 multipliziert mit 100000 wird die *digiti* der siebten und die *articuli* der achten Spalte zuweisen. 100 mit sich selbst multipliziert wird die *digiti* der fünften und die *articuli* der sechsten Spalte zuordnen, 100 mit 1000 multipliziert wird die *digiti* der sechsten und die *articuli* der siebten Spalte zuordnen, 100 mit 100000 multipliziert wird die *digiti* der achten Spalte und die *articuli* der neunten Spalte zuordnen und 100 multipliziert mit 10000 wird die *digiti* der siebten und die *articuli* der achten Spalte zuordnen. 1000 mit sich selbst multipliziert wird, wie man erkennen wird, die *digiti* in der siebten und die *articuli* in der achten Spalte platzieren, 1000 mit 100000 multipliziert wird die *digiti* in der neunten und die *articuli* in der zehnten Spalte platzieren und, wenn 1000 10000 vervielfacht, wird es die *digiti* in der achten und die *articuli* in der neunten

ipsum adaugens digitos in C¶· et articulos in M¶· habere deprehenditur. Centenus autem millenus se ipsum multiplicans digitos XMI et articulos CMI supponet.
Divisiones igitur quantalibet iam ex parte lectoris animus introductus facile valet dinoscere. Breviter etenim de his et summotenus dicturi, si qua obscura intervenerint, diligenti lectorum exercitio adinvestiganda committemus. Si decenus per se vel centenus per se vel ulteriores per semet ipsos dividendi proponantur, minores a maioribus quoadusque dividantur sunt subtrahendi. Singularem autem divisorem deceni aut centeni aut milleni aut ulteriorum vel decenum divisorem sequentium sumpta differentia eos dividere oportet. Compositus autem decenus cum singulari per secundas vel tertias et deinceps secundum denominationem partium decenum vel simplicem vel compositum divisurus est. Centenum vero vel millenum vel ulteriores per decenum compositum, si diligens investigator accesserit, sumpta differentia et primis articulis dividendo appositis, auctis autem dividendo suppositis dividi posse pernoscet. Centenus autem cum singulari compositus centenum vel millenum hoc pacto dividere cognoscitur: Sumpto igitur uno dividendorum, quod residuum fuerit, divisori est coaequandum et, quod superabundaverit, sepositis reservandum. Singularis autem vel, ut alii volunt, minutum per coaequationem maiorum est multiplicandum et digitis quidem perfecta differentia supponenda, articulis autem imperfecta est praeponenda. Et hae differentiae et si forte aliquis seclusus sit, significant, quod residuum sit ex dividendis.
Haec vero brevi introductione praelibantes, si qua obscure sunt dicta vel, ne taedio forent, praetermissa, diligentis exercitio lectoris committimus terminum huius libri facientes et quasi ad utiliora sequentium nos convertentes.



Spalte platzieren. Wenn 10000 der Multiplikator von 100000 ist, wird man erkennen, dass es die *digiti* in die zehnte und die *articuli* in die elfte Spalte setzt, wenn 10000 sich selbst vermehrt, wird es die *digiti* in die neunte Spalte und die *articuli* in die zehnte Spalte setzen. Wenn 100000 mit sich selbst vervielfacht wird, wird es die *digiti* in die elfte und die *articuli* in die zwölfte Spalte legen.
Ein entsprechend geschultes Verständnis des Lesers kann die einzelnen Divisionen leicht erfassen. Wir wollen über diese kurz und zusammenfassend berichten, und sollten irgendwelche Unklarheiten auftreten, so überlassen wir deren Klärung der gewissenhaften Übung des Lesers.
Wenn eine Zehnerzahl durch eine Zehnerzahl, eine Hunderterzahl durch eine Hunderterzahl oder ein höheres Vielfaches von 10 durch ein entsprechend gleiches Vielfaches von 10 zu dividieren ist, dann muss jeweils die kleinere von der größeren abgezogen werden, soweit es geht. Wenn eine einstellige Zahl Divisor einer Zehner-, Hunderter-, Tausenderzahl oder eines größeren Vielfachen von 10 ist, oder wenn eine Zehnerzahl Divisor einer Hunderterzahl oder eines größeren Vielfachen von 10 ist, muss man sie nach Bildung der Differenz dividieren. Eine mit einer einstelligen Zahl verbundene Zehnerzahl wird eine einfache oder zusammengesetzte Zehnerzahl durch die zweiten oder dritten oder höherwertigen – entsprechend ihrer Benennung – Teile des Dividenden teilen. Wenn jemand sorgfältig rechnet, wird er erkennen, dass eine drei- oder vier- oder mehrstellige Zahl durch eine zusammengesetzte Zehnerzahl folgendermaßen dividiert werden kann: Es wird die Differenz gebildet, diese sowie die durch Teilung bestimmten ersten *articuli* angelegt, addiert und nach nochmaliger Teilung unten hinzugefügt. Eine mit einer einstelligen Zahl verbundene Hunderterzahl teilt, wie man weiß, eine Hunderter- oder Tausenderzahl folgendermaßen: Nachdem die höchste Stelle des Dividenden um eins verringert wurde, muss der Rest dem Divisor angepasst werden und das, was übrig bleibt, muss man darunterlegen. Die Einerstelle des Divisors muss mit dem, was durch Angleichung an den größeren Divisor verringert wurde, multipliziert werden und die in der ersten Spalte durchgeführte vollständige Differenz muss unten, die in den folgenden Spalten durchgeführte unvollständige Differenz muss oben dazugelegt werden; und diese Differenzen und, wenn zufällig ein Rechenstein übrig ist, zeigen den Rest der Division an.
Indem wir dieses in einer kurzen Einführung vorstellten, überlassen wir es der Übung des gewissenhaften Lesers, wenn etwas unklar oder, um keine Langeweile zu erregen, zu kurz formuliert war, und beenden hiemit dieses Buch und wenden uns in der Folge Nützlicherem zu.

„Mann mit Rechentisch und Rechentafel“ Etruskische Gemme 4. Jh.v.Chr., Louvre, Paris.

Multiplikation und Division auf dem spätantiken Rechenbrett

Die in diesem Text vorgestellten Rechenregeln beziehen sich auf das Rechnen auf dem Abakus mit Kolumnen. Dieses hatte im 10. Jahrhundert das bis dahin übliche Rechnen auf dem Abakus mit waagrechten Linien, bzw. dem Abakus mit Einschnitten und Knöpfchen, „Handabakus“ genannt, abgelöst. Der Vorteil war, dass sich das diesem Rechnen zugrunde liegende Kolumnenschema leicht aufschreiben ließ. Zuerst wurden dafür mit Sand bestreute Tafeln verwendet. In den Handschriften des 12. Jahrhunderts findet sich der Abakus mit Kolumnen, soweit es für die jeweilige Rechnung notwendig war, mit Tinte auf Pergament geschrieben; ebenso konnte er mit Kreide auf jede beliebige Tischplatte gezeichnet werden.
Von den vier Grundrechnungsarten werden in diesem Text nur die Multiplikation und die Division besprochen. Für die Multiplikation werden allerdings nur die Potenzen von 10 bestimmt, die den Ziffern des Produktes entsprechen, welches man aus Faktoren erhält, die selbst nur Produkte aus einem Einer und einer Potenz von 10 sind. Die Unterscheidung in *digiti* und *articuli* war notwendig, da man damals anfing, für Einer und Zehner dieselben Zahlzeichen zu verwenden. Dass man dabei die Namen dem Fingerrechnen entnahm, erklärt sich daraus, dass man die einzelnen Teilprodukte zunächst wohl im Kopf bildete, sie aber zur Veranschaulichung oder zur Unterstützung des Gedächtnisses gleichzeitig mit den Fingern bildete. Da die Zahlen von 1 bis 9 mit den letzten drei Fingern gebildet wurden, nannte man die Einer *digiti*, das heißt „Fingerzahlen“; die Zehner von 10 bis 90 hießen *articuli* „Gliederzahlen“, da sie durch die Glieder des Daumens und Zeigefingers derselben Hand dargestellt wurden.
Für die Division werden verschiedene Verfahren aufgezeigt, je nachdem, von welcher Art der Divisor bzw. der Dividend ist. Bei den Divisoren werden drei Arten unterschieden:
1. Einer und solche, die Produkte aus Einern und irgendeiner Potenz von 10 sind;
2. Zehner mit Einern und solche, die Produkte aus diesen und irgendeiner Potenz von 10 sind;
3. Hunderter mit Einern und solche, die Produkte aus diesen und irgendeiner Potenz von 10 sind.
Bei den Dividenden werden zwei Arten unterschieden und zwar:
a. solche, die ebensoviele Stellen haben wie der Divisor,
b. solche, die mehr Stellen haben.
Somit ergeben sich sechs verschiedene Fälle, von denen fünf in diesem Text in speziellen Regeln ausformuliert sind.
Regel 1 (für 1a): Subtraktion des Divisors vom Dividenden, sooft mal es geht.
Regel 2 (für 1b): Bildung der Differenz des Einers des Divisors zu 10 und Multiplikation derselben mit der ganzen ersten Ziffer des Dividenden.
Regel 3 (für 2a): Bildung der Differenz des Einers des Divisors zu 10 und Multiplikation derselben mit einem Teile der ersten Ziffer des Dividenden.
Regel 4 (für 2b): Teilung einer Einheit der höchsten Benennung nach Regel 3 und Multiplikation des Restes mit der ersten Ziffer des Dividenden.
Regel 5 (für 3a): Absonderung einer Einheit der höchsten Benennung, Bestimmung des Quotienten aus dem Rest für den Divisor durch Multiplikation des letzteren, Multiplikation der niedrigeren Benennung des Divisors mit diesem Quotienten, Subtraktion des Produktes durch Bildung der Differenzen.
Diese verschiedenen Regeln zeigen, dass bei den Rechenmeistern des Mittelalters eine klare Einsicht in das Wesen der Division bzw. in die Methode des Dividierens fehlte, dass vielmehr Übernommenes und praktisch Geübtes ohne differenzierte Untersuchung aufgezeichnet und weitergegeben wurde.
Es soll nun von jeder Art ein Beispiel gegeben werden mit Ausnahme der ersten, die von selbst klar ist.

C	X	I
		3
		7
~~3~~	~~2~~	~~5~~
	~~9~~	
~~1~~	~~1~~	
	~~3~~	
	~~4~~	
	~~1~~	~~2~~
		~~3~~
	~~1~~	
		3
	3	4
	1	1
		1

ad Regel 2: **325 : 7**
Nachdem über dem Dividenden 325 der Divisor 7 angeschrieben ist, wird über den Divisor seine Differenz zu 10 geschrieben, also 3; diese Differenz wird mit der Hunderterziffer 3 des Dividenden multipliziert, das Ergebnis 9 in die Spalte X eingetragen und dafür die 3 in der Spalte C gestrichen und zugleich unten in die Spalte X eingetragen, um dort zur Bildung des Quotienten beizutragen. Die Zahlen 2 und 9 in Spalte X werden addiert, und das Ergebnis 11 unter C und X eingetragen. Die 1 in Spalte C wird mit der Differenz 3 multipliziert, das Ergebnis 3 unter X eingetragen; 1 wird unter C getilgt und unten unter X eingetragen; 1 und 3 unter X werden addiert, das Ergebnis 4 mit der Differenz 3 multipliziert, und 12 unter X und I eingetragen; dafür wird 4 in X getilgt und unten unter I angeschrieben. Die 1 in Spalte X wird mit der Differenz 3 multipliziert, das Ergebnis 3 unter I eingetragen; dafür wird die 1 unter X getilgt und unten unter I dazugeschrieben; 5, 2 und 3 in Spalte I werden addiert, das Ergebnis 10 mit 1 unter X angeschrieben; die 1 in Spalte X wird mit der Differenz 3 multipliziert, das Ergebnis 3 in I angeschrieben. Die 1 in Spalte X wird dafür gestrichen und unten unter I dazugeschrieben. Damit

ist das Verfahren beendet. Die 3 in Spalte I bezeichnet den Rest der Division; die einzelnen unten stehenden Zahlen miteinander addiert ergeben den Quotienten 46.

ad Regel 3: **912 : 170**
Das Besondere an dieser Regel bestand darin, dass man sich die Zahlen von 1 bis 100 wie in einer Kolumne angeordnet dachte und deshalb die Einer entsprechend der vorausgehenden Zehnerzahl als Einer (1–9), zweite Einer (11–19), dritte Einer (21–29), vierte Einer (31–39) usw. bezeichnete.
Nachdem über dem Dividenden 912 der Divisor 170 geschrieben ist, wird über der 7 des Divisors die Differenz zu 10 geschrieben, nämlich 3. Da aber 7 neben 1 steht, gilt 7 als zweiter Einer; deshalb wird die Differenz 3 nicht mit der ganzen Ziffer 9 des Dividenden multipliziert, sondern nur mit dem zweiten Teil derselben; der zweite Teil von 9 ist 4 und es bleibt noch als Rest 1. Es wird also 9 unter C getilgt, der zweite Teil 4 unten unter I angeschrieben, oben aber statt 9 der Rest 1 gesetzt. Die unten stehende 4 wird mit der Differenz 3 multipliziert und das Ergebnis 12 unter C und X angeschrieben; 1 und 1 unter C, sowie 1 und 2 unter X werden addiert, die Summe 23 unter C und X angeschrieben. Da 23 > 17 ist, kann 17 noch einmal vom Rest 23 subtrahiert werden, das heißt, dass unten unter 4 noch 1 dazugeschrieben, die Differenz 6 aber unter X angeschrieben wird; zusammen mit 2 unter I ergibt das den Rest 62, die unten stehenden 4 und 1 addiert ergeben den Quotienten 5 der Division.

C	X	I
	3	
1	7	
~~9~~	~~1~~	~~2~~
~~1~~		
~~1~~	~~2~~	
~~2~~	~~3~~	
	6	2
		4
		1

ad Regel 4: **528 : 36**
In diesem Fall wird zuerst 1 Hunderter in 10 Zehner geteilt. Da im Divisor 6 neben 3 steht, so ist 6 ein vierter Einer und es ist von 1 Hunderter = 10 Zehner der vierte Teil zu nehmen; der vierte Teil von 10 ist 2 und als Rest bleibt 2. Der Quotient 2 wird unten unter I angeschrieben und mit 5 unter C multipliziert. Das Produkt 10 wird unten unter X als Teil des Quotienten angeschrieben. Der Rest 2 kommt unter X. Der Quotient 2 ist aber auch noch mit der Differenz 4 zu multiplizieren, das Ergebnis 2 . 4 = 8 kommt unter I. Dieser Rest 28 muss gleichfalls mit 5 unter C multipliziert werden; 8 . 5 = 40 bedeutet 4 unter X, 2 . 5 = 10 bedeutet 1 unter C. Dafür wird 5 unter C gestrichen. Mit 1 unter C wird wiederholt, was vorher mit 5 geschah. Der Quotient 2 wird mit 1 unter C multipliziert, das Ergebnis 2 wird unten unter I dazugeschrieben. Der Rest 28 wird nun mit 1 unter C multipliziert; 8 . 1 = 8 bedeutet 8 unter I, 2 . 1 = 2 bedeutet 2 unter X. 8 und 8 unter I addiert ergeben 6 unter I und 1 unter X; 2, 4, 2 und 1 unter X addiert ergeben 9 unter X.
Für den Rest 96 tritt jetzt Regel 3 in Kraft. Der 4. Teil von 9 ist 2 und als Rest bleibt 1, also wird 2 unten unter I dazugeschrieben, 9 unter X getilgt und dafür der Rest 1 geschrieben. Der Quotient 2 wird mit der Differenz 4 multipliziert, das Ergebnis 8 unter I angeschrieben. 8 + 6 = 14 wird unter X und I angeschrieben, 1 + 1 = 2 steht in Spalte X. Da der Rest 24 kleiner ist als der Divisor 36, ist damit das Verfahren abgeschlossen. Die unten stehenden 10, 2 und 2 addiert ergeben den Quotienten 14.

C	X	I
		4
	3	6
~~5~~	~~2~~	~~8~~
	2	8
~~1~~	~~4~~	
	~~2~~	~~8~~
	~~1~~	~~6~~
	~~8~~	
	~~9~~	
	~~1~~	~~8~~
	~~1~~	
	2	4
		2
	1	
		2
		2

ad Regel 5: **800 : 208**
Der Hauptunterschied zwischen dieser Divisionsart und den drei vorausgehenden Methoden besteht darin, dass vom Divisor keine Differenz gebildet wird; dieses Verfahren nähert sich damit dem heute gebräuchlichen Divisionsalgorithmus, von dem es sich freilich durch große Umständlichkeit unterscheidet.
Es wird zunächst von den 8 Hundertern 1 Hunderter weggenommen, um das Produkt aus Quotient und Einerstelle des Divisors subtrahieren zu können; also wird 8 unter C durch 1 und 7 ersetzt. Nun sucht man die Zahl, welche mit der ersten Stelle des Divisors multipliziert, ein Ergebnis zeitigt, das möglichst nahe der ersten Stelle des Dividenden liegt, nämlich 7. Diese Zahl ist 3 und sie wird als Quotient unten unter I angeschrieben. 2 . 3 = 6 ergibt von 7 subtrahiert 1 unter C; 7 unter C wird getilgt. Der zunächst weggenommene Hunderter wird als Summe von 9 Zehnern und 10 Einern aufgefasst; davon wird das Produkt 3 . 8 = 24 subtrahiert und zwar so, dass unter I die Differenz zu 10 und unter X die Differenz zu 9 bestimmt wird:
10 – 4 = 6 unter I, 9 – 2 = 7 unter X. Damit ist die Division zu Ende, da der Rest 176 < 208 ist. Der Quotient ist 3.

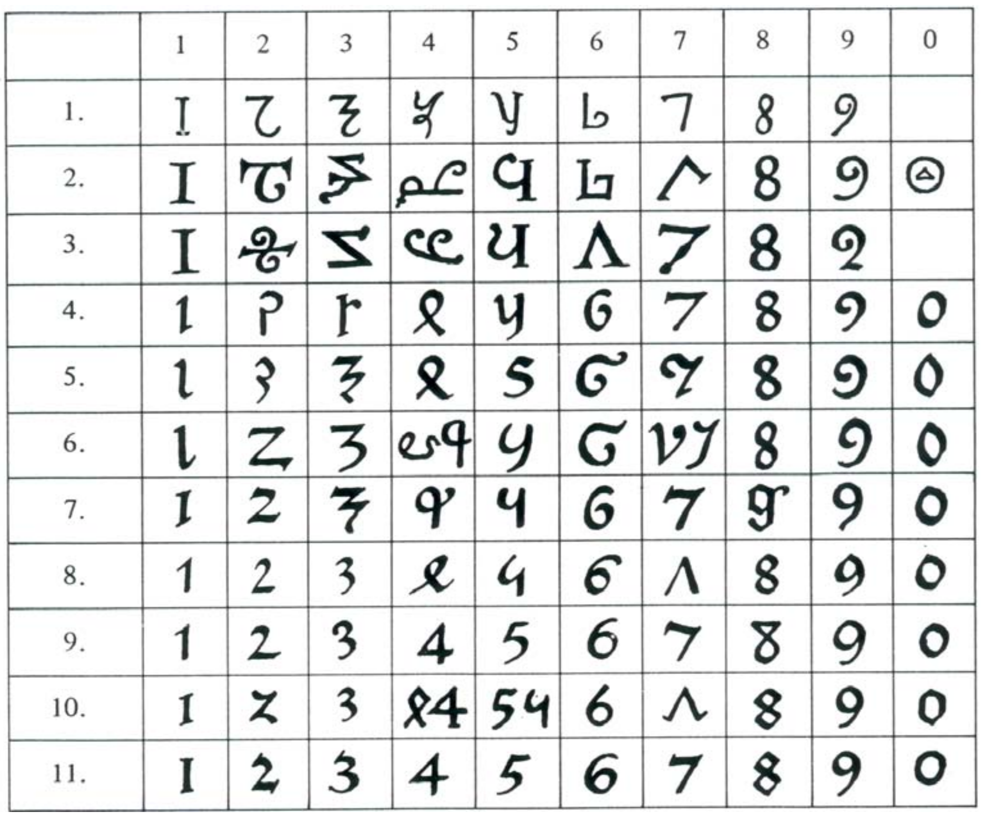
C	X	I
2		8
~~8~~		
~~1~~) ~~7~~		
1	7	6
		3

Daraus ersieht man, dass es bei solchen Divisionsverfahren besonders wichtig war, die Kolumnen zu wissen, in welche die Zerlegungen der Ziffern, die Reste derselben und vor allem die einzelnen Quotienten einzutragen waren. Dass diese Rechenverfahren, so wertlos sie uns auch heute erscheinen, in der damaligen Zeit große Bewunderung erregten, und dass die Inhaber derselben größte Wertschätzung erfuhren, darf mit Sicherheit vermutet werden. Dies führte aber auch dazu, dass das elementare Rechnen zu einem, wenn auch schwierig erlernbaren Handwerk wurde, dass sich die Mitglieder dieser Zunft zu Rechenmeistern entwickelten und dass die in der Antike bei der breiten Masse noch erkennbaren mathematischen Grundkenntnisse im Mittelalter verlorengingen. Es war schließlich das große Verdienst des **Adam Ries** (1492–1559), dass er diese elementaren Rechenfertigkeiten dem einfachen Volk wieder nahebrachte.

(Für detailliertere Informationen vgl. Gottfried Friedlein: Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer. Erlangen 1869. S. 102–120)

Die Entwicklung der Zahlzeichen im Abendland

Die indischen Ziffern setzten sich in Europa nur sehr langsam durch. Als ältestes epigraphisches Beispiel dieser aus den *Brahmi*-Ziffern entstandenen Zahlzeichen für 1 bis 9 gilt die *Gurjara*-Inschrift aus dem Jahr 596 n.Chr. (s.vorige Abb.). Das älteste bisher bekannte arabische Dokument, auf dem sich indische Ziffern befinden, ist ein Papyrus, auf dem die Jahreszahl 260 der *Hidschra* (873/74 n.Chr.) vermerkt ist. Dies gilt zugleich als die älteste arabische Urkunde, auf der die Null – hier als Punkt – dargestellt ist. Das älteste noch erhaltene arabisch geschriebene Rechenbuch, in dem indische Ziffern vorkommen, stammt aus dem Jahr 952/53 n.Chr. und wurde in Damaskus verfasst.
In Westeuropa sind die indischen Ziffern über Spanien bekannt geworden. In einer Handschrift aus dem Jahr 976 n.Chr. (***Codex Vigilianus***) sind die Ziffern 1 bis 9 ohne die Null in einer Form verzeichnet, die im Wesentlichen mit

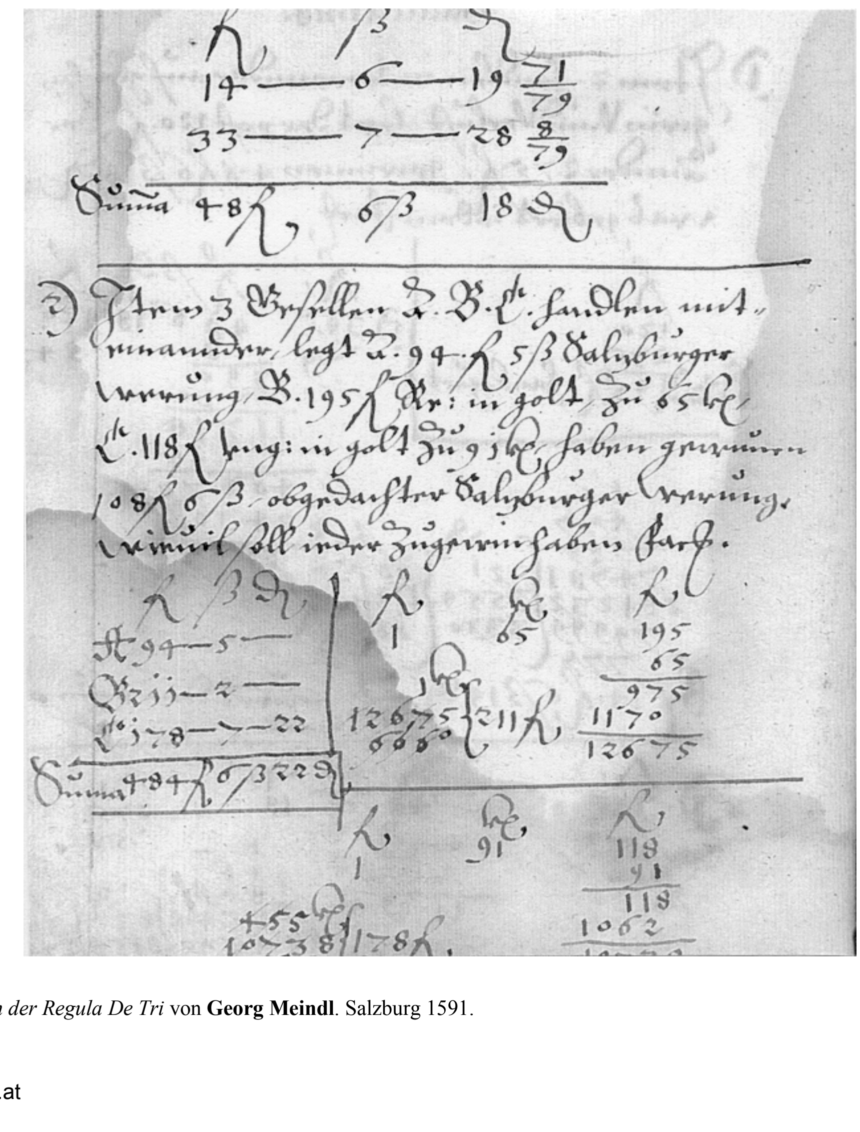


Entwicklung der indischen Ziffern im Abendland:
1. Cod. Vigilianus (976 n.Chr.)
2. Cod. Erlangen (Mitte des 11.Jhs.)
3. „Boetius"-Geometrie (13.Jh)
4. Cod. Vindobonensis [al-Hwarizmi] (1143 n.Chr.)
5. Cod.Par.bibl.nat.16208 (vor 1180)
6. Cod.Par.bibl.nat.16202 (Anfang des 13.Jhs.), Cod.Par.bibl.nat.7359 (um 1300)
7. Columbia-Algorismus (14. Jh.)
8. Algorismus Ratisbonensis (vor 1450)
9. Treviso-Arithmetik (1478)
10. Bamberger Rechenbuch von 1483
11. Albrecht Dürer

den *Gubar*ziffern übereinstimmt. **Gerbert**, der spätere Papst **Sylvester II** (999–1003) hatte sich im Jahre 967 in der spanischen Mark aufgehalten und dort mathematische Studien betrieben. Bekannt wurde **Gerbert** vor allem durch den nach ihm benannten Abakus: dieser hatte bis zu 27 senkrechte Kolumnen, die der Reihe nach von rechts nach links für Einer, Zehner, Hunderter usw. bestimmt waren und mit ... M, C, X, I überschrieben waren. Zum Rechnen dienten Rechensteine aus Holz oder Horn, die als Aufschrift entweder die römischen Ziffern oder häufiger die indischen Ziffern 1 bis 9 in der Form der *Gubar*ziffern trugen. Da beim elementaren Rechnen diese Rechensteine in die jeweiligen Kolumnen eingelegt wurden, – wie oben gezeigt wurde – war bei dieser Art des Rechnens die Null nicht notwendig. Mit diesen Frühformen unserer heutigen Ziffern wurden auch ihre Namen überliefert: 1 *igin*, 2 *andras*, 3 *ormis*, 4 *arbas*, 5 *quimas*, 6 *caltis*, 7 *zenis*, 8 *temenias*, 9 *celentis*, Wortbildungen, die z.T. latinisierte arabische Zahlwörter wiedergeben. Diese Bezeichnungen waren allerdings auf das Abakus-Rechnen beschränkt und wurden nur zur Benennung der Rechenmarken mit indischen Ziffern verwendet. Als sich im 13. Jahrhundert unter dem Einfluss des Rechenbuches *Hisab al-gabr wa-l-muqabala* des al-**Hwarizmi** (9. Jh.n.Chr.) in Europa das Anschreiben der Zahlen in Positionsschreibweise durchsetzte, verschwanden auch diese speziellen Namen für die Ziffern 1 bis 9. Das vorhin genannte Rechenbuch al-**Hwarizmis** ist uns im Original nicht erhalten, es existieren aber mehrere lateinische Übersetzungen aus dem 12. bis zum 15. Jahrhundert. Wie al-**Hwarizmi** selbst die Ziffern geschrieben hat, wissen wir nicht. Auf jeden Fall lehrt er in seinem Buch das Anschreiben der Zahlen „nach dem Verfahren der Inder“, d.h. in Stellenwertschreibweise. So lesen wir in einer Übersetzung aus dem 12. Jahrhundert (***Codex Salem***):

omne, quod dici aut excogitari potest de numeris, scribi vel legi potest his IX figuris, addita ista o, quae cifra *vocatur, nihil habens significare locum absque numero demonstrare.*

„Alles, was über Zahlen gesagt oder gedacht werden kann, kann mit diesen 9 Zahlzeichen geschrieben oder aus ihnen gelesen werden, wobei noch das Zeichen o hinzuzufügen ist, das *cifra* genannt wird und keine andere Funktion hat, als eine Stelle ohne Zahlenwert zu bezeichnen.“



Aus dem *Rechenbuech der Regula De Tri* von **Georg Meindl**. Salzburg 1591.

Das Zeichen für Null

Bis zum Beginn der Neuzeit galt die Null im Allgemeinen nur als Lückenzeichen im Positionssystem, das für sich nichts bedeutet. Die Araber nannten die Null *al-sifr*, was wörtlich „die Leere" bedeutet, woraus sich die in Europa verwendeten Bezeichnungen *cifra*, *zephirum* (**Leonardo v. Pisa** *~1170 – †~1240), *sciffula* (**Jordanus Nemorarius** †1237) ableiten lassen. Im 15. Jahrhundert ist die eigentliche Bedeutung von *cifra* als „das Leere" nicht mehr bekannt. So lässt sich auch erklären, dass in der Schrift *Renatum e Mysterio Principium philologicum auctore* ***Joh. Petro Erico*** (Padua 1686) das Zeichen für Null aus den griechischen Buchstaben α und ω und der Name aus ὦα ζεφύρια abgeleitet wird. Dort steht als Antwort auf die Frage: *unde ductus eorum originem trahat?* („Woher stammt die Schreibweise der Zahlzeichen?"):

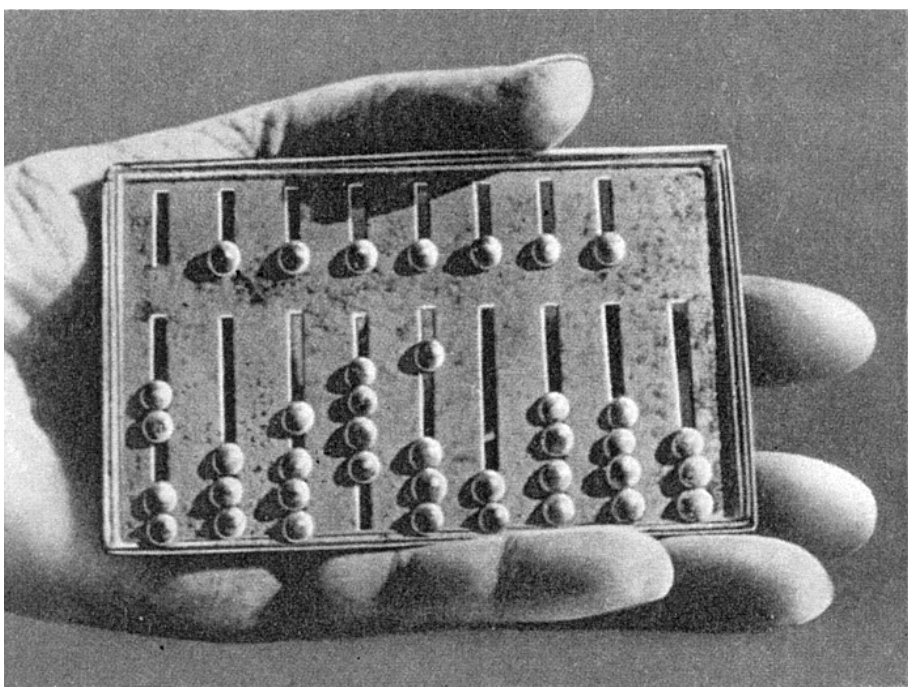
Ab Aegyptiorum, ut dixi, aut si mavis, a iam dictis Graecorum literis vel numeris; cum enim auctores, quorum nomen ignotum, priores duas literas, nempe ω *et* α*, annullaverint appellando illas* ὦα ζεφύρια *(post ab Arabibus corrupte dicta* Zyphra *et ab Italis corruptissime* Zero*) id est: Ova (propter similitudinem) irrita et vento plena.*

„Von den vorhin genannten Buchstaben oder Zahlzeichen der Ägypter oder, wenn du lieber willst, der Griechen; die Erfinder dieser Zahlzeichen, deren Name unbekannt ist, haben zwei vormalige Buchstaben, nämlich ω und α, aus dem Alphabet gestrichen, wobei sie diese ωα ζεφυρια nannten, was soviel wie nutzlose und mit Luft gefüllte Eier – wegen der äußeren Ähnlichkeit – bedeutet. Später wurde von den Arabern irrtümlich *Zyphra* und von den Italienern völlig falsch *Zero* gesagt."

Die Kenntnis des Ziffernrechnens beschränkte sich anfangs auf gelehrte Kreise, besonders in den Klöstern, durch die von etwa 1200 an die neuen Methoden weiter verbreitet wurden. Im kaufmännischen Bereich bürgerte sich die Verwendung der indischen Ziffern nur zögernd ein. So sind die Handelsbücher des 14. Jahrhunderts in Deutschland in römischen Zahlzeichen, in Italien mit indischen (= arabischen) Ziffern geschrieben. Erst die Erfindung des Buchdrucks bewirkte, dass die römischen Zahlzeichen aus dem alltäglichen Rechnen verschwanden und sich die arabischen Ziffern in ihrer noch heute gültigen Schreibweise durchsetzten.

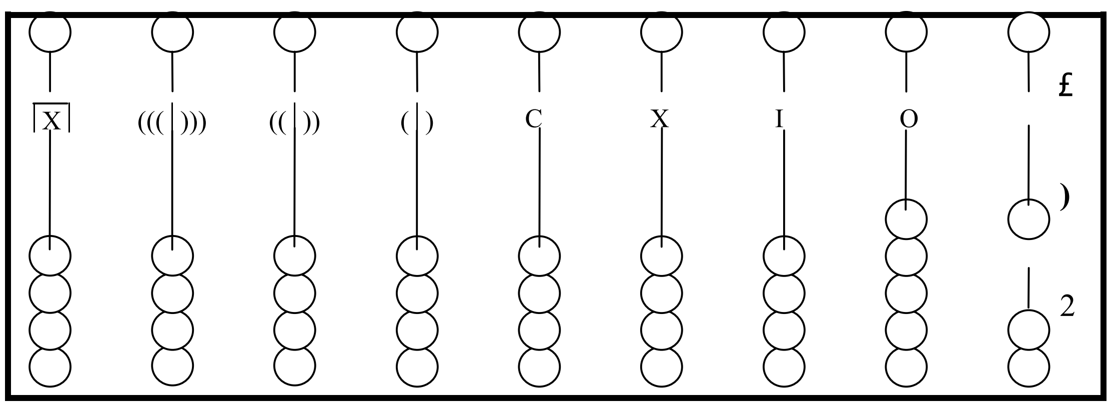
Das Titelblatt des Buches *Arithmetik* von **Gregor Reisch** (*Margarita philosophica* Tract. IV. Freiburg 1503) zeigt die personifizierte Arithmetik, unter deren Augen sich ein anachronistischer Wettkampf zwischen **Pythagoras,** der auf dem Linien-Abakus rechnet, und **Boethius**, der die indischen Ziffern verwendet, abspielt. Aus dem bekümmerten Gesicht des Pythagoras und der Siegermiene von Boethius ersieht man, wem der Autor den Vorzug gab. (s. Titelbild)

Aufbau und Funktionsweise des römischen Handabakus



Römischer Handabakus. Sammlung **Athanasius Kirchner**. Rom, Thermenmuseum.

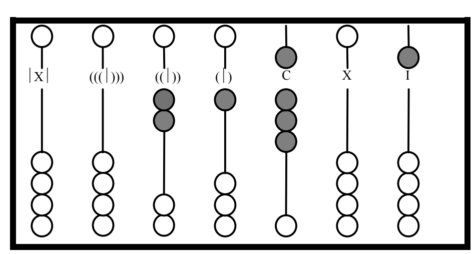
Vom römischen Handabakus gibt es noch zwei erhaltene Stücke. Das eine befindet sich in der Pariser Münzsammlung, das andere, das einst Bestand der Sammlung des berühmten Jesuiten **Athanasius Kirchner** († 1680) war, gehört jetzt dem Thermenmuseum in Rom. Ein weiteres Stück, das der Augsburger Gelehrte **Marcus Welser** besaß, ist heute verloren. Erhalten ist allerdings eine genaue Beschreibung und Abbildung desselben in Welsers Werk *opera historica* (1862). Alle drei Stücke stimmen in ihrer Form und Machart überein.
Die Größe des Abakus entspricht etwa der einer Postkarte, was für eine große Handlichkeit desselben spricht. Er war in der Regel aus Bronze gefertigt, billigere Exemplare auch aus Ton. So klein der Abakus auch war, er reichte doch zur Darstellung aller ganzen Zahlen von 1 bis 9999999 nebst allen Brüchen mit dem Nenner 12 und den Brüchen $^1/_{24}$, $^1/_{36}$, $^1/_{48}$ $^1/_{72}$ und denen, die durch Addition dieser Brüche gebildet werden können. Auf dem Korpus befanden sich Schlitze (*alveoli*), in denen sich kleine Knöpfchen (*claviculi*) verschieben ließen. Über acht größeren senkrecht laufenden Schlitzen befanden sich acht kleinere und rechts davon noch drei Schlitze; bei einigen Exemplaren befand sich an dieser Stelle nur ein durchlaufender Schlitz Auf dem Steg zwischen den beiden Schlitzreihen standen die römischen Zahlzeichen |X|, (((|))), ((|)), (|), C, X, I für 1 Million, 100000, 10000. 1000, 100, 10, 1 sowie O für *uncia* (= $^1/_{12}$), £ für *semuncia* (= $^1/_{24}$),) für *sicilicus* (= $^1/_{48}$) und 2 für *duella* (= $^1/_{36}$). Der erste größere Schlitz links enthielt vier Knöpfchen, von denen jedes eine Million bedeutete, der kleinere Schlitz darüber ein Knöpfchen, das fünf Millionen bedeutete. Ebenso war es bei den folgenden Schlitzen für die Hunderttausender, Zehntausender, Tausender, Hunderter, Zehner und Einer; im achten größeren Schlitz von links her befanden sich 5 Knöpfchen, von denen jedes eine uncia bedeutete, im kleineren Schlitz darüber ein Knöpfchen für 6 unciae. Im obersten Schlitz auf der rechten Seite befand sich ein Knöpfchen für *semuncia* (eine halbe *uncia*), im mittleren eines für *sicilicus* (ein Viertel *uncia*) im unteren zwei, jedes für eine *sextula* (ein Sechstel *uncia*).



Will man eine Zahl darstellen, so werden die betreffenden Kugeln gegen die Mitte zusammengeschoben. Der Fortschritt der Abakusdarstellung einer Zahl gegenüber den schriftlichen Zeichen besteht in der Verwendung eines dezimalen Positionssystems. Für den konstruktiven Aufbau eines zusammengesetzten Zeichens bei arithmetischen Operationen mit Hilfe des Abakus gibt es jeweils einen Algorithmus, der genau die gleichen Elementaroperationen besitzt, wie wir sie beim schriftlichen Rechnen benutzen:

1. Additions- bzw. Subtraktions-Operationen für die Ziffern,
2. Multiplikations- bzw. Divisions-Operationen für die Ziffern (kleines Einmaleins).
3. Übertragsbildung und Übertragsverrechnung auf der jeweils linken Nachbarposition.

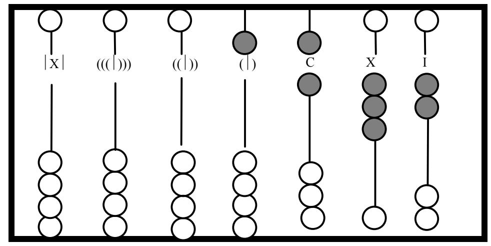
Durch Anwenden dieser Elementaroperationen lassen sich beliebige arithmetische Operationen mit Zahlen, die zusammengesetzte Zahlzeichen besitzen, exakt ausführen. Zur Verdeutlichung des Rechnens mit dem römischen Handabakus sollen nun anhand von Beispielen die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erläutert werden.

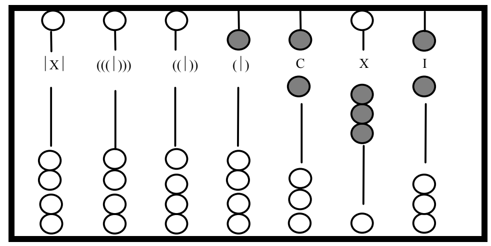


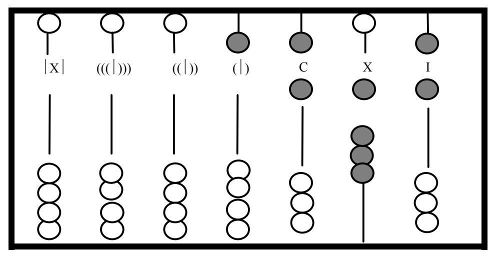
Darstellung der Zahl 21805 auf dem Handabakus

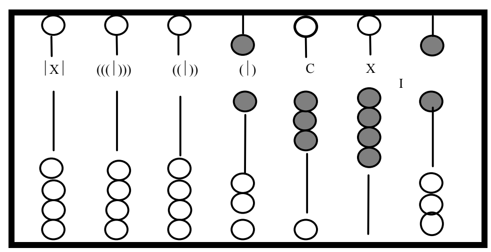
Die Addition auf dem Abakus

Es sind die beiden Zahlen 5632 und 2714 zu addieren. Zunächst wird der erste Summand 5632 auf dem Abakus eingestellt. Die Ziffern des zweiten Summanden, die man entweder im Kopf behält oder schriftlich aufgezeichnet hat, werden nun schrittweise zu den entsprechenden Ziffern des ersten Summanden addiert. Die Reihenfolge, in der die Ziffern des zweiten Summanden positionsgerecht mit dem ersten Summanden verrechnet werden, ist beliebig; wir wollen mit den Einern beginnen.
Zur Ziffer 2 auf der Einerposition wird 4 addiert. Da in der unteren Spalte nur drei Kugeln zur Verfügung stehen, wird die Kugel in der oberen Spalte nach unten geschoben (entspricht + 5) und eine Kugel in der unteren Spalte ebenfalls nach unten geschoben (entspricht – 1); d.h. 2 + 4 = 2 + 5 – 1.
Die Ziffer 3 auf der Zehnerposition kann ohne Umstände um 1 vermehrt werden.
Die Ziffer 6 auf der Hunderterposition kann auf der betrachteten Position nicht um 7 vermehrt werden; daher wird links auf der Tausenderposition eine Kugel hinzugefügt (entspricht + 1000) und dementsprechend muss von 6 auf der Hunderterposition 3 abgezogen werden (entspricht –300). Dafür wird die Kugel in der oberen Spalte nach oben geschoben (bedeutet – 500) und zwei Kugeln in der unteren Spalte werden ebenfalls nach oben geschoben (bedeutet + 200); d.h. 600 + 700 = 600 + 1000 – 500 + 200. Damit erhält man auf der Tausenderposition den Übertrag 1.
Zuletzt werden zur nunmehrigen Ziffer 6 auf der Tausenderposition zwei Kugeln in der unteren Spalte nach oben geschoben (entspricht + 2000). Damit ist die Addition beendet. Das Ergebnis lautet 8346.



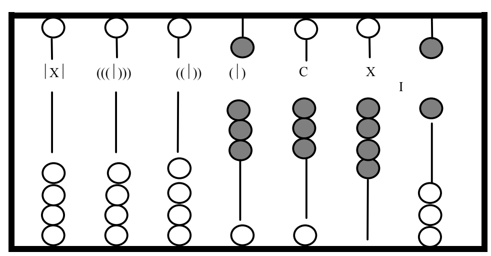


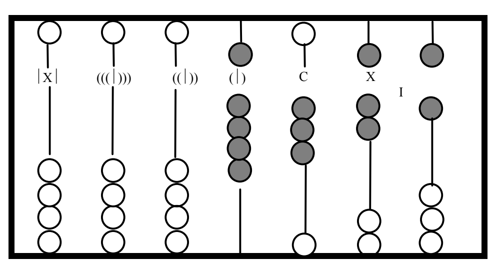




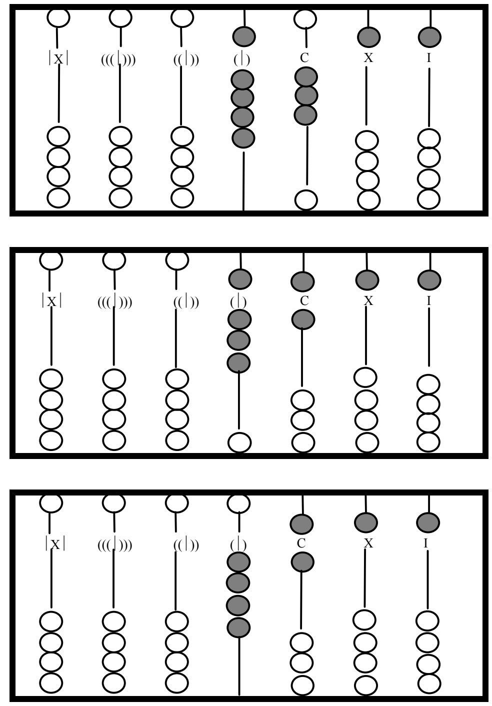
Die Subtraktion auf dem Abakus

Es ist die Subtraktion 9376 – 4721 auszuführen.
Zuerst wird der Minuend 9376 auf dem Abakus eingestellt, der Subtrahend 4721 wird nun Stelle für Stelle mit dem Minuenden verrechnet. Wir beginnen wieder auf der Einerposition.
Von der Ziffer 6 auf der Einerposition kann ohne Umstände 1 subtrahiert werden; dazu wird die Kugel in der unteren Spalte nach unten geschoben. Dasselbe passiert mit der 7 auf der Zehnerposition, nur dass in diesem Fall die zwei Kugeln in der unteren Spalte nach unten geschoben werden. Die Ziffer 3 auf der Hunderterposition kann auf der betrachteten Position nicht um 7 vermindert werden; deshalb wird links auf der Tausenderposition eine Kugel in der unteren Spalte nach unten geschoben (bedeutet –1000). Dafür muss auf der Hunderterposition 3 hinzugefügt werden. Da aber auf dieser





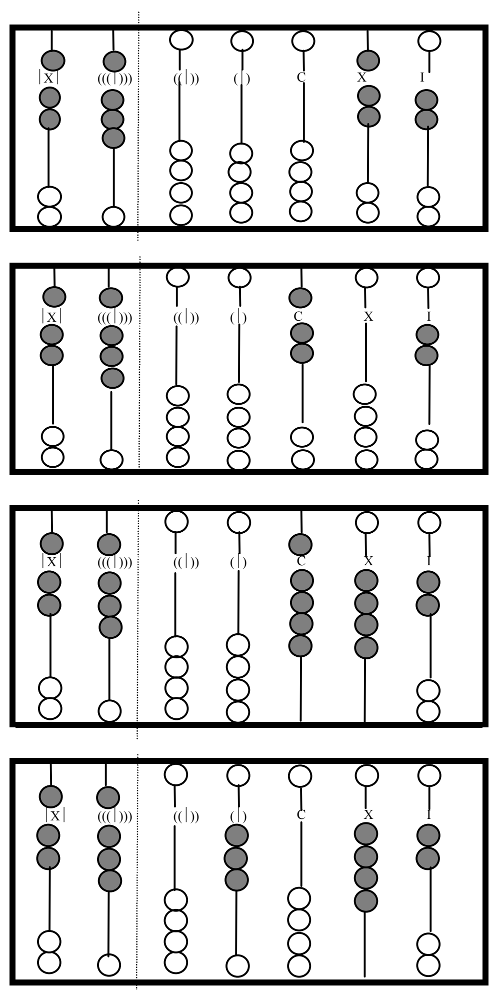
Position in der unteren Spalte nur mehr eine Kugel zur Verfügung steht, werden die Kugel in der oberen Spalte nach unten geschoben (bedeutet + 500) und zwei Kugeln in der unteren Spalte ebenfalls nach unten geschoben (bedeutet –200); d.h. 300 – 700 = 300 – 1000 + 500 – 200.
Zuletzt wird von der nunmehrigen Ziffer 8 auf der Tausenderposition 4 abgezogen. Da aber in der unteren Spalte nur 3 Kugeln nach unten geschoben werden können (entspräche –3000), werden zuerst die Kugel in der oberen Spalte nach oben geschoben (bedeutet –5000) und dann die eine Kugel in der unteren Spalte ebenfalls nach oben geschoben (bedeutet +1000); d.h. 8000 – 4000 = 8000 – 5000 + 1000. Damit ist die Subtraktion beendet. Das Ergebnis lautet 4655.



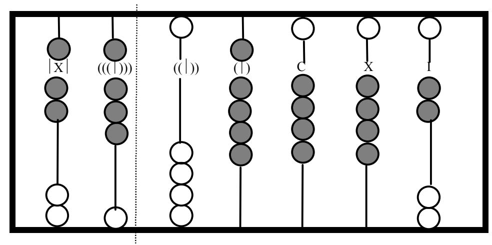
Man erkennt an dieser Vorgangsweise, dass die einzelnen Schritte denjenigen des heute üblichen schriftlichen Addierens bzw. Subtrahierens äquivalent sind. Von Vorteil ist, dass man Summanden, die mündlich genannt werden, sofort, noch während des Sprechens, verrechnen kann. Beim schriftlichen Verfahren muss der gesamte zweite Summand bzw. Subtrahend zuerst ausgesprochen und aufgeschrieben sein, ehe die Rechnung beginnen kann. Außerdem muss die Addition bzw. Subtraktion immer rechts, bei der Einerposition beginnend nach links in strenger Reihenfolge ausgeführt werden, damit einmal notierte Ziffern der Summe bzw. Differenz nicht mehr geändert werden müssen.

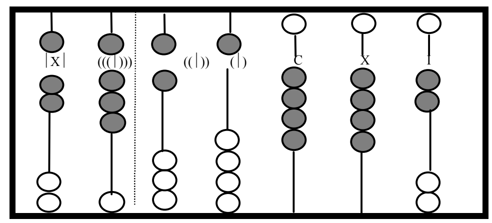
Die Multiplikation auf dem Abakus

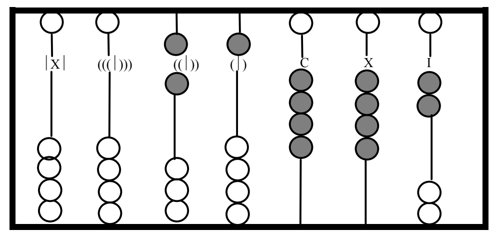
Die Multiplikation auf dem Abakus und das heute übliche schriftliche Multiplizieren unterscheiden sich nicht prinzipiell voneinander. In beiden Verfahren werden Teilprodukte mit dem kleinen Einmaleins gebildet und dann positionsgerecht addiert. Wird daher eine Multiplikation auf dem Abakus ausgeführt, so wird zuerst ein Faktor eingestellt, jedoch nicht positionsgerecht, da ja am Ende der Rechnung das Produkt in der richtigen Position auf dem Abakus aufscheinen soll. Die Ziffern des zweiten Faktors, die man sich gemerkt oder schriftlich aufgezeichnet hat, werden Stelle für Stelle eliminiert, sobald die entsprechenden Teilprodukte gebildet und miteinander verrechnet sind. Auf Grund der Begrenzung des Handabakus auf sieben Stellen ist die Multiplikation nur bis zum Multiplizieren zwei- und dreistelliger, bzw. vier- und einstelliger Zahlen möglich.
Es ist die Multiplikation 78 · 839 auszuführen.
Dazu wird ganz links ohne Beachtung der Position der Faktor 78 eingestellt; dieser wird erst nach Beendigung der Rechnung wieder eliminiert. Nun werden beginnend mit der Einerstelle 9 des zweiten Faktors 839 die Teilprodukte gebildet und positionsgerecht miteinander addiert.
8 · 9 = 72 wird auf der Zehner- und Einerposition, 7 · 9 = 63 auf der Hunderter- und Zehnerposition verrechnet. Die Teilprodukte mit der Einerstelle 9 sind somit verrechnet, die Ziffer 9 kann eliminiert werden.



Nun werden die Teilprodukte mit der Zehnerstelle 3 des zweiten Faktors gebildet. 8 · 3 = 24 wird auf der Hunderter- und Zehnerposition, 7 · 3 = 21 auf der Tausender- und Hunderterposition verrechnet. Die Zehnerziffer 3 des zweiten Faktors kann nun gestrichen werden.
Zuletzt werden die Teilprodukte mit der Hunderterziffer 8 des zweiten Faktors gebildet. 8 · 8 = 64 wird auf der Tausender- und Hunderterposition, 7 · 8 = 56 auf der Zehntausender- und Tausenderposition verrechnet. Damit ist die Multiplikation beendet. Der erste Faktor 78 kann eliminiert werden; das Ergebnis lautet 65442.





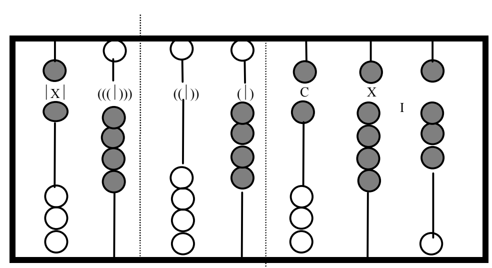


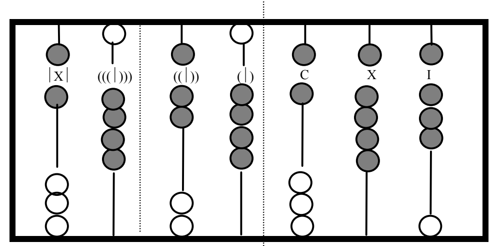
Die Division auf dem Abakus

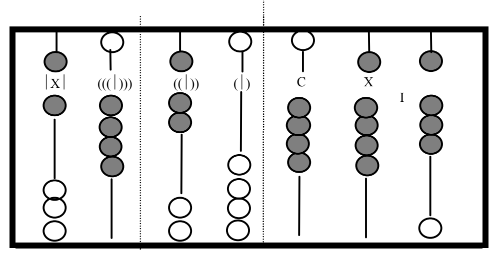
Die Division auf dem Abakus kann prinzipiell genauso erfolgen wie man beim schriftlichen Rechnen verfährt. Die Aufgabe 4698 : 64 wird so gelöst, dass man den gesamten Divisor betrachtet:

4698 : 64 = 73
 21
  26 Rest

Die erste Teiloperation lautet 460 : 64. Bei diesem Algorithmus muss man die Vielfachen des Divisors im Kopf bilden, um die Teiloperationen ausführen zu können. Die Kürze des Algorithmus wird hier durch den Mehraufwand beim Kopfrechnen (Beherrschen des „großen“ Einmaleins) erkauft. Es gibt aber auch einen Divisionsalgorithmus, bei dem nur die Kenntnis des kleinen Einmaleins zur Ausführung der Teiloperationen erforderlich ist. Dieser Algorithmus wird insbesondere beim Abakusrechnen benutzt, kann aber ebenso auch dem schriftlichen Rechnen zugrunde gelegt werden.
Auf Grund der Begrenztheit des Handabakus lassen sich auf ihm Divisionen nur eingeschränkt durchführen: Dividend, Divisor und Quotient dürfen zusammen nicht mehr als acht Stellen beanspruchen.
Zuerst werden auf dem Abakus ganz links, ohne Beachtung der Position der Divisor 64 eingestellt und rechts positionsgerecht der Dividend 4698. Zuerst muss überlegt werden, wieviele Stellen der Quotient hat. Dazu wird die erste Ziffer des Divisors mit der ersten Ziffer des Dividenden verglichen. Da 6 > 4 ist, ist der Quotient zweistellig. Dies wird durch die zweite strichlierte Linie angedeutet.
Als nächstes wird die Zehnerziffer des Quotienten bestimmt, dazu vergleicht man, wie oft 6 in 46 enthalten ist. Das Ergebnis 7 wird auf dem Abakus rechts von der Einerziffer 4 des Divisors eingestellt. Das Produkt 7 · 6 = 42 wird auf der Tausender- und Hunderterposition vom Dividenden subtrahiert, das Produkt 7 · 4 = 28 auf der Hunderter- und Zehnerposition.





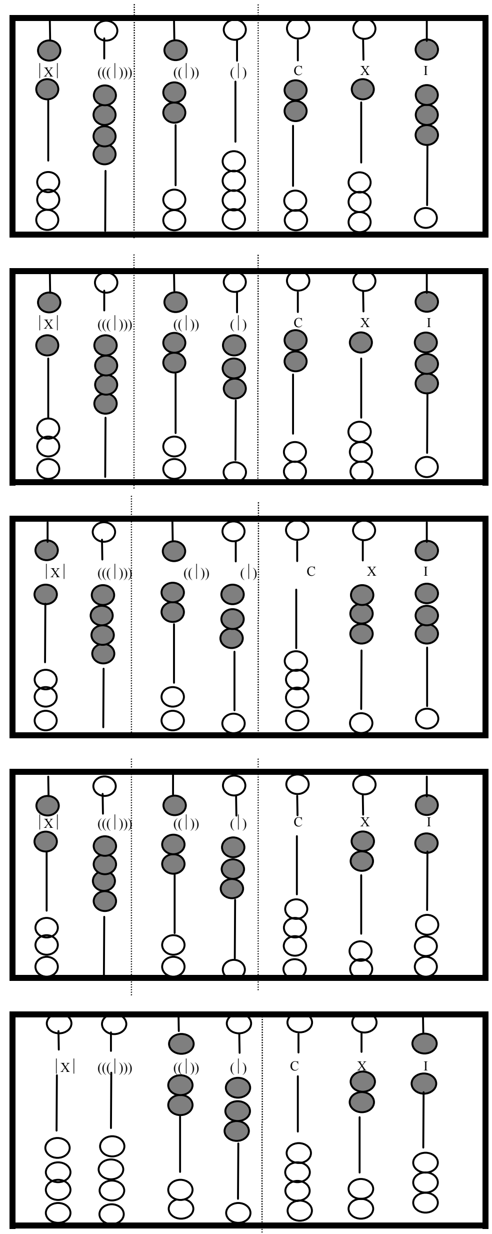


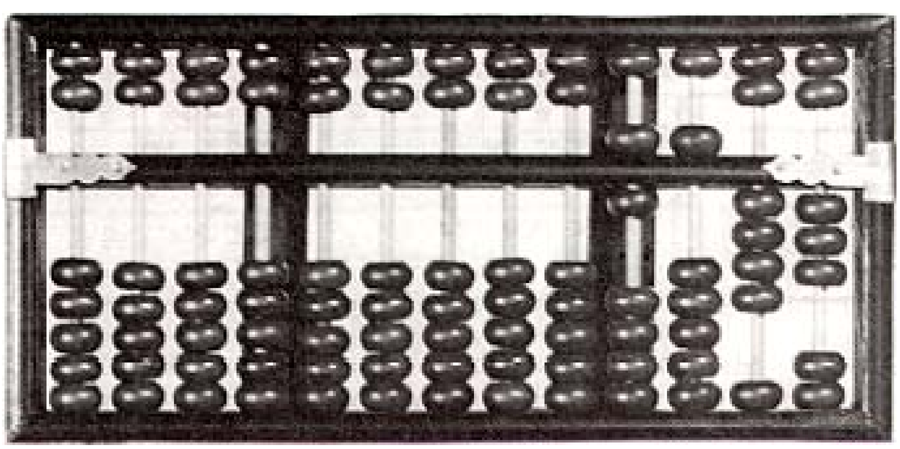
Nun wird die Einerziffer des Quotienten bestimmt. Dazu vergleicht man wieder, wie oft 6 in 21 enthalten ist. Das Ergebnis 3 wird rechts von der Zehnerziffer 7 des Quotienten eingestellt. Das Produkt 3 · 6 = 18 wird auf der Hunderter- und Zehnerposition vom Dividenden subtrahiert, das Produkt 3 · 4 = 12 auf der Zehner-und Einerposition. Damit ist die Division beendet. Der Divisor 64 kann eliminiert werden. Das Ergebnis lautet 73, als Rest bleibt 26.

Das Wichtigste, worauf beim Multiplizieren und Dividieren mit dem Abakus geachtet werden muss, ist die Eintragung der Teilergebnisse in die richtige Position. Bei etwas Übung im Umgang mit dem Abakus hat man sich jedoch rasch an die Regeln gewöhnt und kann auch komplizierte Rechnungen sicher und schnell ausführen.

Die Arbeit mit dem Abakus macht sofort deutlich, dass die eigentlichen Rechenoperationen im Kopf auszuführen sind, d.h. alle drei oben genannten Elementaroperationen muss der Nutzer des Abakus beherrschen, um arithmetische Operationen mit beliebigen Zahlen ausführen zu können. Der Abakus ist lediglich ein Hilfsmittel, die Zwischenergebnisse, die bei der Abarbeitung des Algorithmus anfallen, zu speichern und mit neuen aus Elementaroperationen erhaltenen Teilresultaten zu verrechnen. Der Abakus ist somit nichts anderes als eine Form der Zahlendarstellung und zwar eine gegenständliche, die dem schriftlichen dezimalen Positionssystem, das von den Indern entwickelt wurde, vollkommen äquivalent ist.

Ob die Römer tatsächlich so, wie vorhin gezeigt, mit dem Abakus gerechnet haben, wissen wir nicht, denn es gibt keine schriftlichen Aufzeichnungen darüber. Es ist jedoch anzunehmen, dass sie den Abakus nicht anders benutzten als die Chinesen und Japaner unserer Zeit. In diesen Ländern ist das Abakus-Rechnen noch heute weit verbreitet, und die Modelle des dort verwendeten Abakus unterscheiden sich nur in ihrer Form, nicht aber in ihrer Funktion vom römischen Handabakus.





Moderner chinesischer Suanpan. Von rechts ausgehend steht jede Reihe für eine Dezimalstelle. Ringe oberhalb der Strebe zählen 5, die darunter 1. Um eine Zahl anzuzeigen, werden die Ringe gegen die Strebe geschoben. Die hier gezeigte Zahl ist 6543.

Eine weitere Frage ist, ob die Römer auch ohne Abakus addieren, subtrahieren, multiplizieren oder dividieren konnten. Auch diese Frage kann nicht eindeutig beantwortet werden, da uns dafür die schriftlichen Belege fehlen. Klar ist jedoch, dass dem Kopfrechnen in jedem Fall eine überaus wichtige Funktion zufiel.
Die unerlässliche Voraussetzung für jegliches Kopfrechnen ist die Kenntnis der Zahlenfolge, also des Einsundeins, sowie die Beherrschung des Einmaleins. Dass beides schon im Elementarunterricht gedrillt wurde, dafür gibt es einige Belege. So steht etwa in ungelenker, unsozialer Schülerschrift auf einem griechischen Papyrus aus dem 1. Jahrhundert v.Chr.:

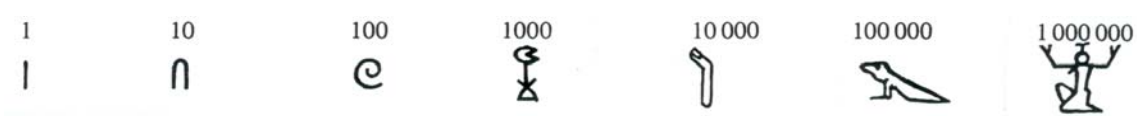
ΑΑΒ ΑΒΓ ΑΓΔ ΑΔΕ
„1+1=2 1+2=3 1+3=4 1+4=5“

Ein Zeugnis für das Herunterleiern des eins und eins in römischen Schulen ist auch die folgende Stelle bei **Augustinus** (confess. I 13):

unum et unum duo, duo et duo quattuor odiosa cantio mihi erat.
„1+1=2, 2+2=4 war mir ein verhaßter Gesang“

Das elementare Rechnen mit ganzen Zahlen von den Ägyptern bis zu den Römern (Text 5)

Die ältesten Einmaleinstabellen finden sich in babylonischen Texten, sie waren aber auch bei den Griechen und Römern in Gebrauch, wie Zitate bei **Aristoteles** (Top. 163b 24f.) und **Cicero** (de nat.deor. II 49) belegen. Einmaleinstabellen zum Einüben für Schüler und zur Kontrolle einer Kopfrechnung finden sich bis ins 16. Jahrhundert in fast allen Rechenbüchern. **Johannes Widmann** etwa reimte 1489 in seinem Buch *Behend vnd hüpsch Rechnung vff allen Kauffmannschafften* (11^r):
Lern wol mit fleiß das ein mal ein
So wirt dir alle rechnung gmein.
Erst im 18. Jahrhundert verlor das Kopfrechnen an Bedeutung und trat in seiner Wichtigkeit hinter das schriftliche Rechnen zurück.
Vieles spricht dafür, dass die Römer, wie schon vor ihnen die Griechen, bei den vier Grundrechnungsarten die Rechenmethoden der Ägypter übernommen haben. Das liegt in erster Linie daran, dass auch die Ägypter, wie später die Griechen (herodianische Zahlenschreibweise) und Römer, ihre Zahlen durch Form-Strich-Symbole darstellten.



Das Addieren ließ sich mit dieser Schreibweise problemlos durchführen; man fasste die Einheiten jeder Stufe, die ja explizit angeschrieben sind, zusammen und ersetzte je 10 Einheiten durch eine Einheit höherer Stufe. Die Subtraktion als Umkehrung der Addition wurde in gleicher Weise durchgeführt. Um zu multiplizieren, könnte man den Multiplikanden so oft anschreiben wie der Multiplikator angibt. Die Ägypter haben dieses Verfahren jedoch durch Anwendung der Verdoppelung abgekürzt. So wird etwa im ***Papyrus Rhind*** die Multiplikation 7 · 2801 folgendermaßen gelöst (Problem 79)

1	2801
2	5602
4	11204
Ergebnis	19607

Die Division wurde von den Ägyptern als umgekehrte Multiplikation durchgeführt, das Schema war genau dasselbe. So wird z.B. im Problem 34 des ***Papyrus Rhind*** die Division 10:1¾ folgendermaßen durchgeführt:

1	**1 ½ ¼**
2	3 ½
4	**7**
$\frac{1}{7}$	¼
¼ $\frac{1}{28}$	½
½ $\frac{1}{14}$	**1**
Zusammen: **5 ½ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{14}$**	**10**

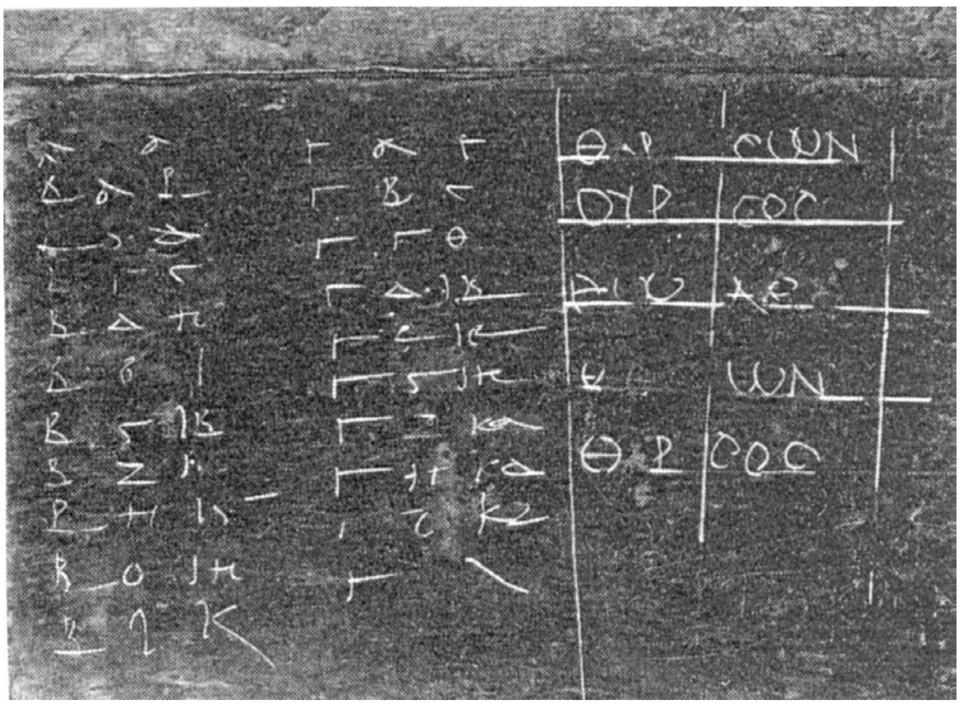

Jüngling mit Rechenmaschine. Grabrelief. Rom. Museo Capitolino

Dass sich in späterer, vor allem römischer Zeit auch andere Formen des schriftlichen Rechnens entwickelten, dafür ist der folgende Text ein Beweis. Dieser stammt zwar aus dem 10. Jahrhundert, ist aber eine arabische Abschrift eines nicht mehr erhaltenen griechischen Textes (**al Karagi**: *Kafi fil-hisab* Bd.2 c.8).

Wenn nun gesagt wird: Dividire 20325 durch 135, so ist das Verfahren folgendes. Du suchst unter den Hundertern die größte Zahl, welche in 135 multiplicirt den Dividendus oder eine demselben nahestehende Zahl giebt, und findest dieselbe in 100. Multiplicirst Du diese in den Divisor, so ergiebt sich 13500. Nimm dies von 20325 weg, so bleibt 6825. Nun suche eine Zahl unter den Zehnern, die in 135 multiplicirt den Betrag oder einen Näherungswerth des Restes giebt, so findest du 50. Multiplicirst Du diese in 135,so erhältst Du 6750. Nimm dieselbe von 6825 weg, dann bleibt 75. ... Du setzest 75 zu 135 ins Verhältniss und erhältst $^{5}/_{9}$. *Nun summire die gefundenen Zahlen, so ergiebt sich* $150^{5}/_{9}$.

Dieses Verfahren ähnelt schon weitestgehend dem heute üblichen schriftlichen Dividieren. Auch das im TEXT 4 angeführte Divisionsverfahren (Regel 5) stimmt mit dem oben beschriebenen im Wesentlichen überein.

Unerlässlich für schnelles und sicheres Rechnen war aber bei all diesen Verfahren, ob mit oder ohne Abakus, die genaue Kenntnis des Einmaleins. Um diese zu gewährleisten, wurden zu allen Zeiten Einmaleinstabellen mit größeren oder kleineren Faktoren verwendet. Das einzige erhaltene Beispiel aus römischer Zeit ist der folgende Text.



Griechische Multiplikationstabelle auf einer Wachstafel. (1.Jh.n.Chr.) Zeile 2–4 kann so wiedergegeben werden: 2.1=2; 2.2=4; 2.3=6. British Library, London.

TEXT 5 Victorius: calculus

Victorius v. Aquitanien wirkte als Mathematiker und Astronom um 450 n.Chr. Seine Schrift *calculus* ist das einzige bekannte antike Rechenbuch in lateinischer Sprache. Dieses Werk ist wie viele andere nicht vollständig erhalten; wir können uns allerdings auf Grund eines Kommentars, der von **Abbo von Fleury** (945–1004 n.Chr.) verfasst wurde, ein genaues Bild vom Gesamtaufbau dieses Buches machen.

Der *calculus* des **Victorius** ist eine Sammlung von Summen, Differenzen, Produkten und Reduktionszahlen, die ein rasches und sicheres Ausrechnen insbesondere der Bruchteile eines Ganzen ermöglichte. Auf eine kurze Einleitung folgten acht Tabellen, die jeweils die Ergebnisse einer Rechnungsoperation enthielten. Die erste Tabelle besteht aus 98 Kolumnen, von denen je 2 zusammengehören. Von diesen zwei enthält die rechte Kolumne alle Zahlen von 1000, 900, 800, ... , 100, 90, 80, ... , 10, 9, 8, ... , 1, $^{11}/_{12}$, $^{10}/_{12}$, ... , $^{1}/_{12}$, $^{1}/_{24}$, $^{1}/_{36}$, $^{1}/_{48}$, $^{1}/_{72}$, $^{1}/_{144}$; die linke Kolumne enthält die Produkte aus diesen Zahlen mit 2, 3, 4, usw. bis 50. Nur diese erste Tabelle ist neben dem Vorwort im Original erhalten. Die weiteren Tabellen gliederten sich entsprechend den *excerpta ex Abbonis scolastici Floriacensis in calculum Victorii commentario* folgendermaßen:

Die zweite Tabelle enthielt die Zwölftel, Einer, Zehner und Hunderter, von denen je zwei addiert 1, 10, 100, 1000 ergeben, beginnend mit ½, 5, 50, 500; also $^{6}/_{12} + ^{6}/_{12} = 1$, $^{7}/_{12} + ^{5}/_{12} = 1$, usw. bis $^{11}/_{12} + ^{1}/_{12} = 1$, 5 + 5 = 10, 6 + 4 = 10, usw. bis 9 + 1 = 10, 50 + 50 = 100, 60 + 40 = 100 usw. bis 90 + 10 = 100, 500 + 500 = 1000, usw. bis 900 + 100 = 1000.

Die dritte Tabelle enthielt die Subtraktionen der Hunderter von 1000, der Zehner von 100, der Einer von 10, der Zwölftel von 1; also 900 von 1000 = 100, 800 von 1000 = 200 usw. 90 von 100 = 10, 80 von 100 = 20 usw. 9 von 10 = 1, 8 von 10 = 2, usw. $^{11}/_{12}$ von 1 = $^{1}/_{12}$, $^{10}/_{12}$ von 1 = $^{2}/_{12}$ usw. bis $^{1}/_{12}$ von 1 = $^{11}/_{12}$.

Die vierte Tabelle enthielt in ähnlicher Weise Additionen 900 + 900 = 1800, 900 + 800 = 1700 usw. 800 + 800 = 1600, 800 + 700 = 1500 usw. bis 100 + 100 = 200. Ähnlich für die Zehner, Einer und Zwölftel, bei letzteren $^{11}/_{12} + ^{11}/_{12} = 1\ ^{10}/_{12}$, $^{11}/_{12} + ^{10}/_{12} = 1\ ^{9}/_{12}$, usw. $^{10}/_{12} + ^{10}/_{12} = 1\ ^{8}/_{12}$, $^{10}/_{12} + ^{9}/_{12} = 1\ ^{7}/_{12}$ usw. bis $^{1}/_{12} + ^{1}/_{12} = ^{2}/_{12}$.

Die fünfte Tabelle enthielt die *vocabula ponderum*, d.h. die Bezeichnungen der Bruchteile von der *dimidia sextula* ($^{1}/_{144}$) bis zum *as* (1) in einer Kolumne und rechts in einer zweiten die Zahl der *scripula* ($^{1}/_{288}$), die jedem Bruchteil entsprach.

Die sechste Tabelle enthielt in einer Kolumne die Zeichen für 1¼, 1½, 1¾, 2, 2¼, 2½, 2¾, 3 usw. wahrscheinlich bis 10 und rechts daneben in einer zweiten Kolumne das Quadrat der jeweiligen Zahl. Das Quadrat von 2¾ etwa wurde in der Form 7 ½ $^1/_{24}$ $^1/_{48}$ angegeben.
In der siebten Tabelle stand neben dem Zeichen von *as* das Zeichen für einen Bruchteil und daneben die Zahl, die angab, wieviele dieser Bruchteile ein *as* ausmachen, also 1 = ½ . 2, 1 = $^1/_3$. 3, usw. bis 1 = $^1/_{144}$. 144.
Ähnlich enthielt die achte Tabelle neben Ganzen mehrere Bruchteile und daneben die Zahl derselben, welche soviel Ganze ausmachen, etwa: 3 $^1/_6$ $^1/_{48}$ 16; 5 $^1/_{12}$ $^1/_{48}$ 48; 7 $^1/_{12}$ $^1/_{24}$ $^1/_{48}$ 48. Über die Ausdehnung dieser Tabelle ist nichts bekannt; nur diese drei Beispiele werden von **Abbo** in seinem Kommentar angeführt.

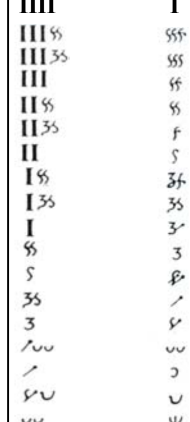
Incipit Praefatio de Ratione Calculi

Unitas illa, unde omnis numerorum multitudo procedit, quae proprie ad arithmeticam disciplinam pertinet, quia vere simplex est et nulla partium congregatione subsistit, nullam utique recipit sectionem. De ceteris vero rebus licet aliquid tale sit, ut propter integritatem ac soliditatem suam unitatis meruerit vocabulo nuncupari, tamen quia compositum est, divisioni necessario subiacebit. Nihil enim in tota rerum natura praeter memoratam numerorum unitatem tam unum inveniri potest, quod nulla omnino valeat divisione distribui. Quod ideo fit, quia non simplicitate sed compositione subsistit. Dicitur enim unus homo, unus equus, unus dies, una hora, unus nummus et alia huius modi innumerabilia, quae licet unitatis sint sortita vocabulum, tamen pro causae atque rationis necessitate dividuntur. Ad huius divisionis compendium tale calculandi argumentum antiqui commenti sunt, ut omnis dividendi integritas rationabili per illud possit partitione secari, sive id corpus sive res incorporea sit, quod dividendum proponitur. In hoc argumento unitas assis vocatur, cuius partes iuxta proportionalitatem suam propriis sunt insignitae vocabulis, notis etiam ad hoc excogitatis, per quas eadem vocabula exprimantur, ut per discretionem nominum et notas nominibus affixas uniuscuiusque particulae notio facilius advertatur. Et assis quidem, qui per I litteram, sicut in numeris unum scribi solet, exprimitur, XII partes habet. Quarum si unam ei detraxeris, reliquae XI partes I ab dicuntur. Illa vero, quam detraxisti, id est duodecima, uncia vocatur. Si duas sustuleris, decem residuae dextans et quod sustulisti, id est duae, sextans appellatur. At si tres dempseris, novem, quae remanserunt, dodrans et tres demptae quadrans vocantur. Quodsi quattuor tollere velis, octo reliquas bissem, quattuor trientem nominabis. Quinque vero sublatis septem residuas septuncem et quinque sublatas quincuncem placuit appellari. Cum vero per medium fuerit facta divisio, utrumque simidiam senis partibus constans semissem vocitarunt, unciam autem et dimidiam sescunciam unciaeque dimidium semunciam. Iam reliquae minutiae, quarum congestione dimidium unciae conficitur, ut sunt sicilici, sextulae et cetera, melius ex ipsius calculi inspectione cognoscuntur. Incipit autem idem calculus a mille et usque ad quinquaginta milia progreditur. Primo per duplicationem, deinde per

Jene Zahl 1, aus der die Vielzahl aller Zahlen hervorgeht und die sich ausschließlich auf das Rechnen bezieht, lässt jedenfalls keine weitere Teilung zu, weil sie eine wirkliche Einheit ist und sich nicht als Vereinigung von Teilen darstellen lässt. Wenn es hingegen bei anderen Größen eine gibt, die wegen ihrer Unversehrtheit und Geschlossenheit als Einheit bezeichnet zu werden verdient, so wird sie dennoch notwendigerweise einer Teilung unterliegen, weil sie zusammengesetzt ist. Denn außer der schon erwähnten Zahl 1 kann unter allen Größen keine Einheit gefunden werden, die keiner weiteren Teilung unterliegt. Denn man spricht von einem Menschen, einem Pferd, einem Tag, einer Stunde, einer Münze und zahllosen weiteren gleich großen Begriffen, die, mögen sie auch die Größenbezeichnung „eins“ tragen, dennoch je nach Sachverhalt und Rechnung weiter unterteilt werden. Um dieses Teilen zu vereinheitlichen, dachten sich die Alten ein System von Brüchen aus, so dass damit jede zu teilende Einheit richtig geteilt werden kann, sei es dass es sich um einen Gegenstand oder um einen abstrakten Begriff handelt, den man sich als zu teilenden vorstellt. In diesem System von Brüchen wird die Einheit *as* genannt, deren Teile entsprechend ihrer Größe mit eigenen Namen und mit eigens für sie erdachten Zeichen, durch die die entsprechende Benennung zum Ausdruck kommt, kenntlich gemacht werden, so dass durch die unterschiedlichen Namen und die mit den Namen verbundenen Zeichen die Kenntnis jedes einzelnen Teils unterstützt wird. Ein *as*, das durch das Zeichen I ausgedrückt und damit genauso wie 1 bei den Zahlen geschrieben wird, hat zwölf Teile. Wenn du einen von ihnen wegnimmst, so wird der Rest elf Teile von I genannt, jener zwölfte Teil aber, den du weggenommen hast, heißt *uncia*. Wenn du zwei Teile wegnimmst, so heißen der Rest *dextans* und die zwei Teile, die du weggenommen hast, *sextans*. Wenn du aber drei Teile wegnimmst, so nennt man die neun Teile, die übrigbleiben, *dodrans* und die drei weggenommenen *quadrans*. Wenn du aber vier wegnehmen willst, so heißen die acht übriggelassenen *bissis*, die restlichen vier *triens*. Wenn fünf Teile weggenommen werden, so nennt man die restlichen sieben gewöhnlich *septunx* und die fünf weggenommenen *quincunx*. Wenn aber in zwei gleich große Hälften geteilt wird, so nennt man jede Hälfte, die jeweils aus sechs Teilen besteht, *semis*; eineinhalb *unciae* heißen *sescuncia*, eine halbe *uncia* heißt *semuncia*. Die übrigen Teile, durch deren Summierung sich die Hälfte einer *uncia* ergibt, so da sind *sicilicus, sextula* und andere, erkennt man leichter aus dem genauen Lesen des eigentlichen *calculus*. Dieser *calculus* beginnt bei 1000 und endet bei 50000. Die Zahlen wachsen zuerst durch Verdoppelung, dann durch triplicationem incrementa capiens tanta numerositate concrescit, ut usque ad infinitum quantitatis eius summa perveniat. Scribitur vero lineis a superiori parte in inferiorem descendentibus superius milium summas ex multiplicatione venientes, inferius divisionum minutias continens. A quibus tamen in legendo principium est faciendum et sic sursum versus eundem, quousque ad miliarii summam, quae ex illa multiplicatione paulatim accrescit, legendo venitur, incipiendumque a dimidia sextula per duplicationem usque ad II milia, inde iterum a dimidia sextula per triplicationem usque ad III milia, tum a dimidia sextula per quadriplicationem usque ad quattuor milia, et sic usque ad finem.

Verdreifachung sosehr an, dass die entsprechenden Werte nach Unendlich streben. Die Zahlen werden senkrecht untereinander geschrieben, oben stehen die Vielfachen von 1000, darunter die entsprechenden Vielfachen der Teile von 1000. Dennoch muss man beim Lesen mit dem kleinsten Teil beginnen und bei den einzelnen Zahlen von unten nach oben vorgehen, bis man zu einem Vielfachen von 1000 kommt, dem man sich durch entsprechendes Vervielfachen allmählich nähert; man muss bei einer halben *sextula* beginnen und gelangt durch Verdoppelung bis 2000, durch Verdreifachung bis 3000, durch Vervierfachung bis 4000 und so fort bis zum Ende.

EXPLICIT PRAEFATIO IN DI NOMINE INCIPIT LIBER CALCULUS QUEM VICTORIUS COMPOSUIT.

$\overline{\text{II}}$	$\overline{\text{I}}$		$\overline{\text{III}}$	$\overline{\text{I}}$		$\overline{\text{IIII}}$	$\overline{\text{I}}$	__ sequuntur numeri V,VI,...,XLV,XLVI
IDCCC	DCCCC		IIDCC	DCCCC		IIIDC	DCCCC	
IDC	DCCC		IICCCC	DCCC		IIICC	DCCC	
ICCCC	DCC		IIC	DCC		IIDCCC	DCC	
ICC	DC		IDCCC	DC		IICCCC	DC	
I	D		ID	D		II	D	
DCCC	CCCC		ICC	CCCC		IDC	CCCC	
DC	CCC		DCCCC	CCC		ICC	CCC	
CCCC	CC		DC	CC		DCCC	CC	
CC	C		CCC	C		CCCC	C	
CLXXX	LXL		CCLXX	LXL		CCCLX	LXL	
CLX	LXXX		CCXL	LXXX		CCCXX	LXXX	
CXL	LXX		CCX	LXX		CCLXXX	LXX	
CXX	LX		CLXXX	LX		CCXL	LX	
C	L		CL	L		CC	L	
LXXX	XL		CXX	XL		CLX	XL	
LX	XXX		LXL	XXX		CXX	XXX	
XL	XX		LX	XX		LXXX	XX	
XX	X		XXX	X		XL	X	
XVIII	VIIII		XXVII	VIIII		XXXVI	VIIII	
XVI	VIII		XXIIII	VIII		XXXII	VIII	
XIIII	VII		XXI	VII		XXVIII	VII	
XII	VI		XVIII	VI		XXIIII	VI	
X	V		XV	V		XX	V	
VIII	IIII		XII	IIII		XVI	IIII	
VI	III		VIIII	III		XII	III	
IIII	II		VI	II		VIII	II	
II	I		III	I		IIII	I	
								

$\overline{\underline{XLV}II}$	$\overline{I}$	$\overline{\underline{XLVI}II}$	$\overline{I}$	$\overline{\underline{XLVIII}I}$	$\overline{I}$
$\underline{XLIICC}C$	DCCCC	$\underline{XLIIICC}$	DCCCC	$\underline{XLIIIIC}$	DCCCC
$\underline{XXXV}IIDC$	DCCC	$\underline{XXXVII}ICCCC$	DCCC	$\underline{XXXVIII}ICC$	DCCC
$\underline{XXX}IIDCCCC$	DCC	$\underline{XXXIIII}DC$	DCC	$\underline{XXXIIII}CCC$	DCC
$\underline{XXVI}IICC$	DC	$\underline{XXVIII}DCCC$	DC	$\underline{XXVIII}ICCCC$	DC
$\underline{XXIIII}D$	D	$\underline{XXIIII}$	D	$\underline{XXIIII}D$	D
$\underline{XVIIII}DCCC$	CCCC	$\underline{XVIII}ICC$	CCCC	$\underline{XVIII}IDC$	CCCC
$\underline{XIIII}C$	CCC	$\underline{XIIII}CCCC$	CCC	$\underline{XIIII}DCC$	CCC
$\underline{VIIII}CCCC$	CC	$\underline{VIIII}DC$	CC	$\underline{VII}IIDCCC$	CC
$\underline{IIII}DCC$	C	$\underline{IIII}DCCC$	C	$\underline{IIII}DCCCC$	C
$\underline{IIII}CCXXX$	LXL	$\underline{III}ICCCXX$	LXL	$\underline{III}ICCCCX$	LXL
$\underline{III}DCCLX$	LXXX	$\underline{III}DCCCXL$	LXXX	$\underline{III}DCCCCXX$	LXXX
$\underline{III}CCXC$	LXX	$\underline{II}ICCCLX$	LXX	$\underline{II}ICCCCXXX$	LXX
$\underline{II}DCCCXX$	LX	$\underline{II}DCCCLXXX$	LX	$\underline{II}DCCCCXL$	LX
$\underline{I}ICCCL$	L	$\underline{I}ICCCC$	L	$\underline{I}ICCCCL$	L
$\underline{I}DCCCLXXX$	XL	$\underline{I}DCCCCXX$	XL	$\underline{I}DCCCCLX$	XL
ICCCCX	XXX	ICCCCXL	XXX	ICCCCLXX	XXX
DCCCCXL	XX	DCCCCLX	XX	DCCCCLXXX	XX
CCCCLXX	X	CCCCLXXX	X	CCCCXC	X
CCCCXXIII	VIIII	CCCCXXXII	VIIII	CCCCXLI	VIIII
CCCLXXVI	VIII	CCCLXXXIII	VIII	CCCXCII	VIII
CCCXXVIIII	VII	CCCXXXVI	VII	CCCXLIII	VII
CCLXXXII	VI	CCLXXXVIII	VI	CCXCIIII	VI
CCXXXV	V	CCXL	V	CCXLV	V
CLXXXVIII	IIII	CXCII	IIII	CXCVI	IIII
CXLI	III	CXLIIII	III	CXLVII	III
XCIIII	II	XCVI	II	XCVIII	II
XLVII	I	XLVIII	I	XLVIIII	I
XLIII [illegible]	[illegible]	XLIIII	[illegible]	XLIIII [illegible]	[illegible]
XXXVIIII [illegible]	[illegible]	XL	[illegible]	XL [illegible]	[illegible]
XXXV [illegible]	[illegible]	XXXVI	[illegible]	XXXVI [illegible]	[illegible]
XXXI [illegible]	[illegible]	XXXII	[illegible]	XXXII [illegible]	[illegible]
XXVII [illegible]	[illegible]	XXVIII	[illegible]	XXVIII [illegible]	[illegible]
XXIII [illegible]	[illegible]	XXIIII	[illegible]	XXIIII [illegible]	[illegible]
XVIIII [illegible]	[illegible]	XX	[illegible]	XX [illegible]	[illegible]
XV [illegible]	[illegible]	XVI	[illegible]	XVI [illegible]	[illegible]
XI [illegible]	[illegible]	XII	[illegible]	XII [illegible]	[illegible]
VII [illegible]	[illegible]	VIII	[illegible]	VIII [illegible]	[illegible]
V [illegible]	[illegible]	VI	[illegible]	VI [illegible]	[illegible]
III [illegible]	[illegible]	IIII	[illegible]	IIII [illegible]	[illegible]
I [illegible]	[illegible]	II	[illegible]	II [illegible]	[illegible]
I [illegible]	[illegible]	I [illegible]	[illegible]	I [illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	I	[illegible]	I [illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Die römischen Bruchzeichen

Die Zerlegung einer Einheit in Untereinheiten ist bei allen Maßsystemen fast selbstverständlich. Die Römer benützten dafür die *uncia* als ein Zwölftel der Einheit, des *as*. Das *as*, ursprünglich eine Kupfermünze gleich der römischen *libra* vom Gewicht von ca. 327 g, wurde in der Folge von den Rechnern als abstrakte Einheit gewählt, sein zwölfter Teil, die *uncia,* wurde zu $^1/_{12}$. Auch die Unterteilungen der *uncia*, *semuncia*, *sicilicus*, *scripulum,* wurden zu Bruchbezeichnungen.

Ursprünglich kamen die Römer mit wenigen Brüchen aus, die man als „natürliche Brüche“ bezeichnen kann. Das sind solche, die im täglichen Leben am häufigsten vorkommen, wie ½, $^1/_3$, ¼. Dies zeigt sich darin, dass diese Brüche eigene Bezeichnungen haben, nämlich: *semis, triens, quadrans*. Zu diesen Brüchen traten als nächstes die Komplementbrüche hinzu, die durch den dazugehörigen Stammbruch auf die Einheit 1 ergänzt werden. Erkennbar ist dies in den Bezeichnungen *bessis (= binae ex tribus assis partes)* für $^2/_3$, *dodrans* (= *dequadrans* „Einheit weniger ¼“) für ¾ oder *deunx* (= *deuncia* Einheit weniger $^1/_{12}$) für $^{11}/_{12}$.

Andere Bruchteile wurden durch Stammbruchsummen ausgedrückt. Diese Bruchdarstellung findet sich bereits bei den Ägyptern, von den Griechen wurde sie oft, von den Römern ausschließlich verwendet. Zur leichteren Bestimmung der jeweiligen Stammbruchsummen existierten bereits seit ägyptischer Zeit (***Papyrus Rhind*** 16.Jh.v.Chr.) Tabellen, in denen die entsprechenden Zerlegungen verzeichnet sind. So beginnt die Tabelle im Papyrus Rhind für die Brüche $^2/_n$:

$2 : 3 = {}^{2}/_{3}$
$2 : 5 = {}^{1}/_{3} + {}^{1}/_{15}$
$2 : 7 = {}^{1}/_{4} + {}^{1}/_{28}$
$2 : 9 = {}^{1}/_{6} + {}^{1}/_{18}$ usw.

Bruchteil des As	Name	Erklärung	Zeichen Volusius Maecianus	Victorius
$\frac{1}{2}$	semis	$\frac{1}{2}$ as	S	S
$\frac{1}{12}$	uncia	$\frac{1}{12}$ as	—	
$\frac{1}{24}$	semuncia	$\frac{1}{2}$ uncia		
$\frac{1}{48}$	sicilicus	$\frac{1}{4}$ uncia	Ɔ	Ɔ
$\frac{1}{72}$	sextula	$\frac{1}{6}$ uncia		
$\frac{1}{144}$	dimidia sextula	$\frac{1}{2}$ sextula		Ψ
$\frac{1}{288}$	scripulum	$\frac{1}{24}$ uncia		
$\frac{1}{3}$	triens	4 unciae	= =	
$\frac{1}{4}$	quadrans	3 unciae	= −	
$\frac{1}{6}$	sextans	2 unciae	=	
$\frac{1}{8}$	sescuncia	$1\frac{1}{2}$ unciae		
$\frac{1}{9}$	nona	1 uncia, 2 sextulae		
$\frac{5}{12}$	quincunx	5 unciae	= = −	
$\frac{7}{12}$	septunx	$\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$	S −	
$\frac{2}{3}$	bessis	$\frac{8}{12}$	S =	
$\frac{3}{4}$	dodrans	$\frac{9}{12}$	S = −	
$\frac{10}{12}$	dextans	$\frac{10}{12}$	S = =	
$\frac{11}{12}$	deunx	1 as – 1 uncia	S = = −	

Römische Bruchbezeichnungen

Wie die Zerlegungen in den 2:n Tabellen gefunden und warum unter den verschiedenen möglichen Zerlegungen gerade diese gewählt wurden, ist nicht bekannt. Maßgeblich waren dafür aber eine geringe Gliederzahl der Stammbruchsumme, ein möglichst großer Hauptbruch (also ein kleiner Nenner) und bei einer Summe von mehr als zwei Gliedern ein möglichst großer letzter Restbruch (also möglichst kleiner Nenner). Aus Tabellen späterer Zeit wird ersichtlich, dass bei diesen Zerlegungen offensichtlich die Formel ${}^{1}/_{n} = {}^{1}/_{n+1} + {}^{1}/_{n(n+1)}$ eine Rolle gespielt hat. Allerdings kann weder für die ägyptische, noch in der Folge für die griechische Mathematik ein einheitliches Verfahren nachgewiesen werden. **Heron von Alexandrien** verwendete in seinen Schriften zur Bezeichnung allgemeiner Brüche das ägyptische Verfahren der Stammbruchsummen. Von ihm scheinen die Römer dieses Verfahren übernommen zu haben.
Wie schwierig und unübersichtlich das Bruchrechnen bei den Römern war, davon zeugt das folgende Zitat aus *de arte poetica* von **Horaz** : (v. 323–332)

Grais ingenium, Grais dedit ore rotundo
Musa loqui praeter laudem nullius avaris.
Romani pueri longis rationibus assem
discunt in partis centum diducere. ‚dicat
filius Albini: si de quincunce remota est
uncia, quid superat? poteras dixisse.‘ ‚triens.‘ ‚eu
rem poteris servare tuam. redit uncia, quid fit?‘

‚semis.' an, haec animos aerugo et cura peculi
cum semel imbuerit, speremus carmina fingi
posse linenda cedro et levi servanda cupresso?

„Das Griechenvolk hat von der Muse die schöpferische Begabung, den Zauberfluss der Rede; und Ehrgeiz ist der Griechen einziger Geiz. Roms Jugend lernt in langen Bruchrechnungen hundertteilig das As zerlegen. ‚Sagen soll mir der junge Albinus: nehme ich von fünf Zwölfteln eine *uncia* weg: was bleibt als Rest? – Du konntest es schon heraus haben!' ‚Ein drittel As.' ‚Bravo! Wirst mal das Deinige zusammenhalten. Bekomme ich eine *uncia* hinzu: wie groß ist die Summe?' ‚Ein halb As.' Was können wir hoffen, wenn dieser Kupferrost, dieser Geschäftstrieb die Seelen einmal erfasst hat? Etwa den Aufschwung zu Dichtungen, die, durch Zedernöl geschützt, im glatten Zypressenschrein fortzudauern würdig wären?"

Das elementare Rechnen mit Bruchzahlen von den Ägyptern bis zu den Römern (Text 6)

Wie die Römer Bruchrechnungen ausführten, wissen wir nicht, da schriftliche Zeugnisse fehlen. Es ist jedoch wahrscheinlich, dass die Römer auch darin **Heron von Alexandria** folgten. Heron verwendete, wie schon erwähnt, zum Anschreiben der Brüche sehr oft das ägyptische Verfahren der Stammbruchsummen. Dieses Verfahren war, wie Beispiele zeigen, bis in die byzantinische Zeit in Verwendung, obwohl man zu dieser Zeit auch schon allgemeine Brüche schreiben und mit ihnen rechnen konnte.
Werden zwei Summen von Stammbrüchen miteinander addiert, so ist das Ergebnis wieder eine Summe von Stammbrüchen. Würde man sie einfach zusammenschreiben, so wäre die Rechnung trivial, das Ergebnis aber unübersichtlich. Eine Aufgabe aus byzantinischer Zeit (***Papyrus Alimin*** 6.Jh.n.Chr.) zeigt, wie man bei solchen Rechnungen vorging. (Aufgabe 9)

„Von $^2/_3$ ziehe ¼ $^1/_{44}$ ab. In welcher Tabelle steht ¼ $^1/_{44}$? In der Tabelle der 11-tel bei 3. $^2/_3$ von 11 sind $7^1/_3 – 3 = 4^1/_3$; und von $4^1/_3$ nimm das 11-tel; so ergibt sich $^1/_3$ $^1/_{22}$ $^1/_{66}$.."

Man löste demnach diese Subtraktion von Brüchen durch Zuhilfenahme einer Tabelle von Stammbruchsummen, die einen Stammbruch ergeben. Ein solches Verfahren zum Lösen von Bruchrechnungen entspricht ganz römischem Mathematikverständnis. Das bereits von **Diophant** (2. Jh.n.Chr.) erwähnte allgemeine Verfahren (*opera* IV 36 Ed. Tannery):

„Die x jedes Bruches werden wechselseitig mit den Nennern multipliziert."

lässt sich bei den Römern nirgends nachweisen.

Bei der Multiplikation von Brüchen kannten die Ägypter nur die folgenden Operationen:
1. Halbieren eines Stammbruchs; das geschieht durch Verdoppeln des Nenners.
2. Verdoppeln eines Stammbruchs; das ist bei geraden Nennern klar, bei ungeraden Nennern bekommt man mit der 2 : n Tabelle eine Stammbruchsumme.
3. Multiplizieren eines Stammbruchs mit einem Stammbruch; das geschieht durch Multiplikation der Nenner.

Mit diesen Operationen erhält man eine Stammbruchsumme, die man dann nach Möglichkeit vereinfachen musste. Allerdings kannte bereits **Heron** ein allgemeines Verfahren der Bruchmultiplikation. Bei der Berechnung der Fläche eines Rechtecks, dessen Seiten keine ganzzahligen Vielfachen der Maßeinheit sind, führt er die Multiplikation $^{33}/_{64}$. $^{62}/_{64}$ folgendermaßen aus (*opera* IV p. 266 Ed. Schmidt):

„$^{33}/_{64}$ von den $^{62}/_{64}$ sind $^{2046}/_{64}$ von den 64-teln"

$$\text{d.h. } \frac{33}{64}.\frac{62}{64}=\frac{\frac{33}{64}.62}{64}=\frac{\frac{33.62}{64}}{64}.$$

Was die Division von Brüchen anlangt, so war bereits den Ägyptern bekannt, dass zwei Brüche mit gleichem Nenner $^a/_n$ und $^b/_n$ dividiert werden, indem man die Zähler miteinander dividiert. So wird etwa in Aufgabe 36 des ***Papyrus Rhind*** gerechnet:

$$1:3\frac{1}{3}\frac{1}{5}=\frac{30}{30}:\frac{106}{30}=30:106$$

Dieses Verfahren fand auch bei den Griechen seine Anwendung.

Die Römer hatten durch die Fixierung auf Uncialbrüche einen großen Nachteil gegenüber den Griechen mit ihrer alphabetischen Bruchzahlendarstellung. Trotzdem schafften sie es auch mit ihrem Bruchzahlensystem, sehr präzise Rechnungen auszuführen.

TEXT 6 Sex. Iulius Frontinus: de aquis urbis Romae c.37–63

De aquis urbis Romae ist die exakteste Fachschrift in lateinischer Sprache, die uns erhalten ist. In diesem Text werden von allen in Rom in Verwendung stehenden Wasserrohren (*fistulae*) Durchmesser, Umfang und Fassungsvermögen angegeben, wobei die jeweiligen Rohrstücke (*moduli aquarum*) alle gleiche Höhe haben. Sehr komplizierte Rechnungen in Uncialbrüchen bis herab zum *scripulum* des *digitus* müssen dem Autor bei der Abfassung seiner Schrift vorgelegen sein. Da nämlich die lichte Weite von Röhren mit kreisrundem Querschnitt sowohl nach dem Flächeninhalt dieser Kreise als auch nach deren Durchmesser zu berechnen war, so mussten die *scripula* des Längendigitus, d.h. Brüche mit den Nennern 2,3,4,6,8,12, usw. bis 288 quadriert und umgekehrt aus den Brüchen des Quadratdigitus Brüche des Längendigitus berechnet werden.

Formulas modulorum, qui sunt omnes viginti et quinque, subieci, quamvis in usu quindecim tantum frequentes sint, derectas ad rationem de qua locuti sumus, emendatis quattuor, quos aquarii novaverant. Secundum quod et fistulae omnes, quae opus facient, derigi debent aut, si haec fistulae manebunt, ad quinarias quot capient computari. Qui non sint in usu moduli, in ipsis est adnotatum.
Uncia habet diametri digitum unum et trientem digiti: capit plus quam quinaria quinariae sescuncia et scripulis tribus et bese scripuli. Digitus quadratus in latitudine et longitudine aequalis est. Digitus quadratus in rotundum redactus habet diametri digitum unum et digiti sescunciam sextulam: capit quinariae dextantem. Digitus rotundus habet diametri digitum unum; capit quinariae septuncem et semiunciam sextulam.

Fistula quinaria:
diametri digitum unum = –
perimetri digitos tres S = = – ЭIII,
capit quinariam unam.

Fistula senaria:
diametri digitum unum S,
perimetri digitos IIII S = £ ЭII,
capit quinariam unam = = – ЭVII.

Fistula septenaria:
diametri digitum I S = –,
perimetri digitos V S,
capit quinariam I S = = – £;
in usu non est.

Fistula octonaria:
diametri digitos duos,
perimetri digitos sex = – ЭX,
capit quinarias II S £ ЭV.

Fistula denaria:
diametri digitos duos et semis,
perimetri digitos septem S = = ЭVII,
capit quinarias IIII.

Fistula duodenaria:
diametri digitos III,
perimetri digitos VIIII = = – ЭIII,

Von den 25 Arten von Wasserrohren, die es gibt, wenn auch nur 15 von ihnen häufig verwendet werden, habe ich die Normmaße, die nach dem schon erwähnten Verfahren berechnet wurden, zusammengestellt; von 4 Arten, die die Erbauer von Wasserleitungen neu geschaffen haben, wurden die entsprechenden Maße verbessert. Alle Rohre, die verlegt werden, müssen dieser Zusammenstellung entsprechen, und wenn man diese Art von Rohren beibehält, muss ihr jeweiliges Fassungsvermögen in *quinaria* berechnet werden. Sollten gewisse Rohrweiten nicht verwendet werden, so ist das an den jeweiligen Stellen vermerkt.
Ein Rohr von einer *uncia* hat einen Durchmesser von 1 $^{1}/_{3}$ *digiti*; das Fassungsvermögen beträgt mehr als 1 $^{1}/_{8}$ $^{3}/_{288}$ $^{2}/_{864}$ *quinaria.* 1 *digitus quadratus* ist die Fläche eines Quadrats mit der Seitenlänge 1 *digitus*. Ein Rohr mit einer Querschnittsfläche von 1 *digitus quadratus* hat einen Durchmesser von 1 $^{1}/_{8}$ $^{1}/_{72}$ *digiti*. Es hat ein Fassungsvermögen von $^{10}/_{12}$ *quinaria*. Ein *digitus rotundus* ist die Fläche eines Kreises mit dem Durchmesser 1 *digitus*. Ein Rohr mit solcher Querschnittsfläche fasst $^{7}/_{12}$ $^{1}/_{24}$ $^{1}/_{72}$ *quinaria.*

fistula quinaria:
Durchmesser: 1 ¼ *digiti*
Umfang: 3 $^{11}/_{12}$ $^{3}/_{288}$ *digiti*
Fassungsvermögen :1 *quinaria*.

fistula senaria:
Durchmesser: 1 ½ *digiti;*
Umfang: 4 $^{2}/_{3}$ $^{1}/_{24}$ $^{2}/_{288}$ *digiti;*
Fassungsvermögen 1 $^{5}/_{12}$ $^{7}/_{288}$ *quinaria*

fistula septenaria
Durchmesser: 1 ¾ *digiti*
Umfang: 5 ½ *digiti*
Fassungsvermögen: 1 $^{11}/_{12}$ $^{1}/_{24}$ *quinaria;*
wird nicht verwendet.

fistula octonaria:
Durchmesser: 2 *digiti*
Umfang: 6 ¼ $^{10}/_{288}$ *digiti*
Fassungsvermögen: 2 ½ $^{1}/_{24}$ $^{5}/_{288}$ *quinaria*

fistula denaria:
Durchmesser: 2 ½ *digiti*
Umfang: 7 $^{5}/_{6}$ $^{7}/_{288}$ *digiti*
Fassungsvermögen: 4 *quinaria*

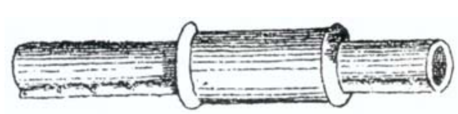
fistula duodenaria:
Durchmesser: 3 *digiti*
Umfang: 9 $^{5}/_{12}$ $^{3}/_{288}$ *digiti*

capit quinarias quinque S = – ЭIII;
in usu non est.
Apud aquarios habebat diametri digitos III £ ЭVI capacitatis quinarias sex.
Fistula denum quinum:
diametri digitos III S = –,
perimetri digitos XI S = – ЭX,
capit quinarias novem.
Fistula vicenaria:
diametri digitos quinque
perimetri digitos XV S = £ ЭII,
capit quinarias sedecim.
Apud aquarios habebat diametri digitos IIII S, capacitatis quinarias duodecim S = = – £.
Fistula vicenum quinum:
diametri digitos quinque S – £ ЭV,
perimetri digitos decem et septem S = £ ЭVI,
capit quinarias XX = = ЭVIIII,
in usu non est.
Fistula tricenaria:
diametri digitos sex = ЭIIII,
perimetri digitos decem et novem = = –,
capit quinarias viginti quattuor = = – ЭV.
Fistula tricenum quinum:
diametri digitos sex S = ЭII,
perimetri digitos XX S = = – £ ЭV,
capit quinarias XXVIII S ЭIII;
in usu non est.
Fistula quadragenaria:
diametri digitos septem – £ ЭIII,
perimetri digitos XXII = = –,
capit quinarias XXXII S –.
Fistula quadragenum quinum:
diametri digitos septem S £ Эocto,
perimetri digitos XXIII S = – ЭX,
capit quinarias XXXVI S – £ ЭVIII;
in usu non est.
Fistula quinquagenaria:
diametri digitos septem S = = – £ ЭV,
perimetri digitos XXV £ ЭVIIII,
capit quinarias XL S = £ ЭV.
Fistula quinquagenum quinum:
diametri digitos octo = = ЭX,
perimetri digitos XXVI = – £,
capit quinarias XLIIII S = – £ ЭII;
in usu non est.
Fistula sexagenaria:
diametri digitos octo S = £ ЭIX,
perimetri digitos XXVII = = – £,
capit quinarias XL octo S = = ЭXI.
Fistula sexagenum quinum:
diametri digitos novem – ЭIII,
perimetri digitos XX octo S –,
capit quinarias quinquaginta duo S = = – ЭVIII;
in usu non est.

Fassungsvermögen: 5 ¾ $^{3}/_{288}$ *quinaria;*
wird nicht verwendet.
Bei den Erbauern von Wasserleitungen hatte dieses Rohr einen Durchmesser von 3 $^{1}/_{24}$ $^{6}/_{288}$ *digiti* und ein Fassungsvermögen von 6 *quinaria.*
fistula denum quinum:
Durchmesser: 3 ¾ *digiti*
Umfang: 11 ¾ $^{10}/_{288}$ *digiti*
Fassungsvermögen: 9 *quinaria*.
fistula vicenaria:
Durchmesser: 5 *digiti*
Umfang: 15 $^{2}/_{3}$ $^{1}/_{24}$ $^{2}/_{288}$ *digiti*
Fassungsvermögen: 16 *quinaria.*
Bei den Erbauern von Wasserleitungen hatte dieses Rohr einen Durchmesser von 4 ½ *digiti* und ein Fassungsvermögen von 12 $^{11}/_{12}$ $^{1}/_{24}$ *quinaria.*
fistula vicenum quinum:
Durchmesser: 5 $^{7}/_{12}$ $^{1}/_{24}$ $^{5}/_{288}$ *digiti*
Umfang: 17 $^{2}/_{3}$ $^{1}/_{24}$ $^{6}/_{288}$ *digiti*
Fassungsvermögen: 20 $^{1}/_{3}$ $^{9}/_{288}$ *quinaria;*
wird nicht verwendet.
fistula tricenaria:
Durchmesser: 6 $^{1}/_{6}$ $^{4}/_{288}$ *digiti*
Umfang: 19 $^{5}/_{12}$ *digiti*
Fassungsvermögen 24 $^{5}/_{12}$ $^{5}/_{288}$ *quinaria*.
fistula tricenum quinum:
Durchmesser: 6 $^{2}/_{3}$ $^{2}/_{288}$ *digiti*
Umfang: 20 $^{11}/_{12}$ $^{1}/_{24}$ $^{5}/_{288}$ *digiti*
Fassungsvermögen: 28 ½ $^{3}/_{288}$ *quinaria;*
wird nicht verwendet.
fistula quadragenaria:
Durchmesser: 7 $^{1}/_{8}$ $^{3}/_{288}$ *digiti*
Umfang: 22 $^{5}/_{12}$ *digiti*
Fassungsvermögen 32 $^{7}/_{12}$ *quinaria.*
fistula quadragenum quinum:
Durchmesser: 7 ½ $^{1}/_{24}$ $^{8}/_{288}$ *digiti*
Umfang 23 ¾ $^{10}/_{288}$ *digiti*
Fassungsvermögen: 36 $^{7}/_{12}$ $^{1}/_{24}$ $^{8}/_{288}$ *quinaria;*
wird nicht verwendet.
fistula quinquagenaria:
Durchmesser: 7 $^{11}/_{12}$ $^{1}/_{24}$ $^{5}/_{288}$ *digiti*
Umfang 25 $^{1}/_{24}$ $^{9}/_{288}$ *digiti*
Fassungsvermögen: 40 $^{2}/_{3}$ $^{1}/_{24}$ $^{5}/_{288}$ *quinaria*.
fistula quinquagenum quinum:
Durchmesser: 8 $^{1}/_{3}$ $^{10}/_{288}$ *digiti*
Umfang: 26 ¼ $^{1}/_{24}$ *digiti*
Fassungsvermögen: 44 ¾ $^{1}/_{24}$ $^{2}/_{288}$ *quinaria*;
wird nicht verwendet.
fistula sexagenaria:
Durchmesser: 8 $^{2}/_{3}$ $^{1}/_{24}$ $^{9}/_{288}$ *digiti*
Umfang: 27 $^{5}/_{12}$ $^{1}/_{24}$ *digiti*
Fassungsvermögen: 48 $^{5}/_{6}$ $^{11}/_{288}$ *quinaria*.
fistula sexagenum quinum:
Durchmesser: 9 $^{1}/_{12}$ $^{3}/_{288}$ *digiti*
Umfang: 28 $^{7}/_{12}$ *digiti*
Fassungsvermögen: 52 $^{11}/_{12}$ $^{8}/_{288}$ *quinaria;*
wird nicht verwendet.

Fistula septuagenaria:
diametri digitos novem = = – ЭVI,
perimetri digitos XXIX S =,
capit quinarias LVII ЭV.
Fistula septuagenum quinum:
diametri digitos novem S = – ЭVI,
perimetri digitos XXX S = £,
capit quinarias LXI – ЭII,
in usu non est.
Fistula octogenaria:
diametri digitos decem – ЭII,
perimetri digitos XXXI S = £,
capit quinarias LXV =.
Fistula octogenum quinum:
diametri digitos decem = = £ ЭVII,
perimetri digitos XXXII S = ЭVI,
capit quinarias LXVIIII = £ ЭVIII;
in usu non est.
Fistula nonagenaria:
diametri digitos decem S = ЭX,
perimetri digitos triginta tres S – £ ЭIII,
capit quinarias septuaginta tres = – £ ЭV.
Fistula nonagenum quinum:
diametri digitos X S = = – £ ЭXI,
perimetri digitos XXXIIII S £ ЭV,
capit quinarias LXXVII = = £ ЭII;
in usu non est.
Fistula centenaria:
diametri digitos XI = – ЭVIIII,
perimetri digitos XXXV = = – £,
capit quinarias octoginta unam = = – ЭX.
Apud aquarios habebat diametri digitos XII, capacitatis quinarias nonaginta II – £ ЭX.
Fistula centenum vicenum:
diametri digitos duodecim = = ЭVII,
perimetri digitos XXXVIII S = =,
capit quinarias LXXXXVII S = –.
Apud aquarios habebat diametri digitos XVI, capacitatis quinarias centum sexaginta tres S = = –, qui modus duarum centenariarum est

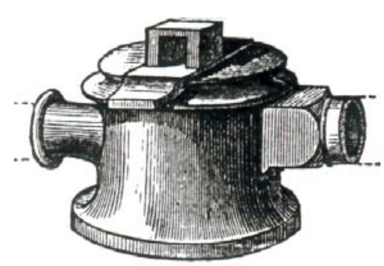
a.



b.

Bleiröhren aus Rom (a) und aus Pompeji (b).

fistula septuagenaria:
Durchmesser: $9\ {}^{5}/_{12}\ {}^{6}/_{288}$ *digiti*
Umfang $29\ {}^{2}/_{3}$ *digit*i
Fassungsvermögen: $57\ {}^{5}/_{288}$ *quinaria*.
fistula septuagenum quinum:
Durchmesser: 9 ¾ ${}^{6}/_{288}$ *digiti*
Umfang: $30\ {}^{2}/_{3}\ {}^{1}/_{24}$ *digiti*
Fassungsvermögen: $61\ {}^{1}/_{12}\ {}^{2}/_{288}$ *quinaria*;
wird nicht verwendet.
fistula octogenaria:
Durchmesser: $10\ {}^{1}/_{12}\ {}^{2}/_{288}$ *digiti*
Umfang $31\ {}^{2}/_{3}\ {}^{1}/_{24}$ *digiti*
Fassungsvermögen: $65\ {}^{1}/_{6}$ *quinaria*.
fistula octogenum quinum:
Durchmesser: $10\ {}^{1}/_{3}\ {}^{1}/_{24}\ {}^{7}/_{288}$ *digiti*
Umfang: $32\ {}^{2}/_{3}\ {}^{6}/_{288}$ *digiti*
Fassungsvermögen: $69\ {}^{1}/_{6}\ {}^{1}/_{24}\ {}^{8}/_{288}$ *quinaria*;
wird nicht verwendet.
fistula nonagenaria:
Durchmesser: $10\ {}^{2}/_{3}\ {}^{10}/_{288}$ *digiti*
Umfang: $33\ {}^{7}/_{12}\ {}^{1}/_{24}\ {}^{3}/_{288}$ *digiti*
Fassungsvermögen: 73 ¼ ${}^{1}/_{24}\ {}^{5}/_{288}$ *quinaria.*
fistula nonagenum quinum:
Durchmesser: $10\ {}^{11}/_{12}\ {}^{1}/_{24}\ {}^{11}/_{288}$ *digiti*
Umfang: 34 ½ ${}^{1}/_{24}\ {}^{5}/_{288}$ *digiti*
Fassungsvermögen: $77\ {}^{1}/_{3}\ {}^{1}/_{24}\ {}^{2}/_{288}$ *quinaria;*
wird nicht verwendet.
fistula centenaria:
Durchmesser: 11 ¼ ${}^{9}/_{288}$ *digiti*
Umfang: $35\ {}^{5}/_{12}\ {}^{1}/_{24}$ *digiti*
Fassungsvermögen: $81\ {}^{5}/_{12}\ {}^{10}/_{288}$ *quinaria.*
Bei den Erbauern von Wasserleitungen hatte dieses Rohr einen Durchmesser von 12 *digiti* und ein Fassungsvermögen von $92\ {}^{1}/_{12}\ {}^{1}/_{24}\ {}^{10}/_{288}$ *quinaria.*
fistula centenum vicenum:
Durchmesser: $12\ {}^{1}/_{3}\ {}^{7}/_{288}$ *digiti*
Umfang: $38\ {}^{5}/_{6}$ *digiti*
Fassungsvermögen: 97 ¾ *quinaria.*
Bei den Erbauern von Wasserleitungen hatte dieses Rohr einen Durchmesser von 16 *digiti* und ein Fassungsvermögen von $163\ {}^{11}/_{12}$ *quinaria*, das dem Maß von zwei *centenaria* entspricht.



Hahn einer Wasserleitung aus Capri
Neapel, Museo Nazionale.

Wie Frontinus in Text 6 zu diesen relativ exakten Werten gekommen ist, darüber findet sich nichts in seiner Schrift. **Gottfried Friedlein** glaubt eine Erklärung dafür geben zu können. Er schreibt (*Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer* S. 91 f.):

„Es muss eine Möglichkeit geben, mit den im Alterthum bekannten Rechnungsoperationen zu den Zahlen zu gelangen, welche die Rechnung und die besste Handschrift als die richtigen erwiesen haben. Ich glaube diese Möglichkeit im Folgenden zeigen zu können.
Der unciae modulus hat [...] einen Durchmesser von 1 $^1/_3$ digitus, der quinarius modulus einen Durchmesser von 1 ¼ digitus; daraus wird gefolgert, dass der erstere modulus 1 + $^1/_8$ + $^3/_{288}$ + $^2/_3 . ^1/_{288}$ quinaria enthält. Da beide Modulus von gleicher Höhe waren, so verhielten sie sich wie ihre Grundflächen, und da diese Kreise waren, wie die Quadrate der Durchmesser; man hatte also 1 $^1/_3$ und 1 ¼ jedes mit sich selbst zu multipliciren und dann das erstere Produkt durch das 2. zu dividiren:

1 $^1/_3$. 1 $^1/_3$ = 1 $^1/_3$ $^1/_3$ $^1/_9$ = $^{16}/_9$
1 ¼ . 1 ¼ = 1 ¼ ¼ $^1/_{16}$ = $^{25}/_{16}$

Um eine Division mit ganzen Zahlen zu erhalten, brauchte man nur durch Multiplication gleiche Nenner herzustellen, dadurch fand man $^{16}/_9$ = $^{256}/_{144}$, $^{25}/_{16}$ = $^{225}/_{144}$, wodurch die Aufgabe zurückgeführt ist auf die Theilung von 256 durch 225.

$$\frac{256}{225}=1\frac{31}{225},\frac{31}{225}=\frac{248}{225.8}=\frac{225+23}{225.8}=\frac{1}{8}+\frac{23}{225.8},\frac{23}{225.8}=\frac{828}{225.288}=\frac{675+153}{225.288}=\frac{3}{288}+\frac{153}{225.288}$$
$$=c.\frac{3}{288}+\frac{2}{3}.\frac{1}{288}.$$

Also ist

$$\frac{256}{225}=1+\frac{1}{8}+\frac{3}{288}+\frac{2}{3}.\frac{1}{288}.$$

Die Zahl 8 ergab sich dadurch, dass 8 . 31 das nächst grössere Produkt aus 31 zu 225 ist; die Zahl 288 zog man desshalb bei, weil 1 scripulum = $^1/_{288}$ as.
In demselben §.[...] heisst es, digitus quadratus in rotundum redactus habet diametri digitum unum et digiti sescunciam sextulam *d.h.der Durchmesser eines Kreises, dessen Fläche gleich 1 digitus im Quadrat ist, enthält 1 $^1/_8$ $^1/_{72}$ digitus. Nach der Weise der Alten erhielt man die Fläche eines Kreises, wenn man den Durchmesser mit sich selbst und dann das Produkt mit $^{11}/_{14}$ multiplicirte. Sollte also aus dem Inhalt der Durchmesser bestimmt werden, so hatte man vom Inhalt $^{14}/_{11}$ zu nehmen, das Produkt als Quadratzahl anzusehen und die Seite dieses Quadrates zu bestimmen. In unserer Weise war*

$$x=\sqrt{1^2.\frac{14}{11}}.$$

Um nun von $^{14}/_{11}$ die Quadratseite annähernd zu finden scheint man durch Multiplication den Zähler und Nenner einer Quadratzahl möglichst nahe gebracht zu haben. Multipliciert man zunächst mit 11, so erhält man $^{154}/_{11^2}$, wo 154 den Quadratzahlen 144 und 169 doch zu ferne liegt; multipliciert man aber weiter mit der ersten Quadratzahl 4, so erhält man $^{616}/_{22^2}$ und 616 liegt der Quadratzahl 625 nahe genug um die Quadratseite von $^{616}/_{22^2}$ gleich $^{25}/_{12}$ zu setzen.

$$\frac{25}{12}=1\frac{3}{22}=1\frac{24}{22.8}=1\frac{1}{8}\frac{1}{88}.$$

Für letzteren Bruch, für welchen man kein Zeichen hatte, scheint man den nächsten d.i. $^1/_{72}$ gesetzt und so die oben angegebenen Zahlen gefunden zu haben.
In ähnlicher Weise lassen sich alle Zahlen finden, welche bei Frontinus vorkommen, wobei zu beachten ist, dass die Rechnung Frontin's nicht fehlerfrei gewesen zu sein scheint."

Die Entwicklung der Zahl π

Bereits die ältesten mathematischen Überlieferungen enthalten Versuche, die Kreisfläche bzw. die Kreislinie durch bekannte Maße auszudrücken. Im ***Papyrus Rhind*** ist zum ersten Mal eine Quadratur des Kreises vorgenommen. Die hier gegebene Vorschrift, welche $^{8}/_{9}$ des Durchmessers als Seite eines gleich großen Quadrates wählt, entspricht einem Wert $\pi = (^{16}/_{9})^2 = 3{,}1605$, ist also von geradezu überraschender Genauigkeit. Wie die ägyptischen Gelehrten zu diesem Näherungswert gekommen sind, wissen wir allerdings nicht.
Klarer ist die Entstehung des altbabylonischen Wertes $\pi = 3$, der uns in einer biblischen Stelle erhalten ist. In der Beschreibung des salomonischen Tempels wird ein großes Waschgefäß, Ehernes Meer genannt, erwähnt, dessen Durchmesser mit 10 Ellen und dessen Umfang mit 30 Ellen angegeben wird (*Chronika*: 4, 2):

„*Und er machte ein Meer, gegossen, zehn Ellen weit, von einem Rand zum anderen, rund umher, und fünf Ellen hoch, und ein Maß von 30 Ellen mochte es umher begreifen*.“

Erklären lässt sich der Wert $\pi = 3$ daraus, dass bei der Rechnung der Umfang des Kreises dem Umfang des eingeschriebenen Sechseckes gleichgesetzt wurde, dessen Konstruktion seit ältesten Zeiten bekannt war. Dieser Näherungswert wird im Altertum oft benutzt, da er sich als grober Überschlagswert für viele Zwecke in der Praxis gut eignet. Selbst **Heron von Alexandria** verwendet diesen Wert gelegentlich, obwohl zu seiner Zeit schon genauere Näherungswerte für π bekannt waren.
Mit der Inangriffnahme des Kreisquadraturproblems durch die griechischen Mathematiker beginnt in der Geschichte der Kreisberechnung eine theoretische Periode, während man die vorausgegangene Zeit als empirische Periode auffassen kann. Drei Wege sind es, die die griechischen Mathematiker dabei beschreiten. Zuerst verlangen sie die geometrische Konstruktion eines flächengleiches Quadrates allein mit Zirkel und Lineal; sodann versuchen sie das Problem mittels mechanisch konstruierbarer Kurven zu lösen. Schließlich wenden sie ein iteratives Verfahren mit Näherungswerten an, die einzige richtige Methode, wie wir heute wissen. **Bryson von Herakläa**, der Schüler des **Eukleides von Megara** (~450–370 v.Chr.) lehrte:

„*Der Kreis ist größer als alle eingeschriebenen und kleiner als alle umbeschriebenen Polygone. Dasselbe gilt für das zwischen diese beschriebene Polygon. Dieses ist also flächengleich dem Kreis*.“

Bryson beging somit bei der Ausführung dieses völlig richtigen Gedankens nur den damals freilich verzeihlichen Fehler, dass er in pythagoräischer Tradition glaubte, die Kreisfläche sei das arithmetische Mittel zwischen einem eingeschriebenen und einem umbeschriebenen Polygon.
Hundert Jahre später griff **Archimedes** (287–217v.Chr.) das Problem der Kreisberechnung wieder auf und stellte aufbauend auf den Aussagen von Bryson die folgenden drei Hauptsätze auf (*opera* ed. Heiberg Bd. I S. 258 ff.):

1. *Jeder Kreis ist einem rechtwinkeligen Dreieck inhaltsgleich, wenn der Radius gleich der einen der den rechten Winkel einschließenden Seiten, der Umfang aber gleich der Basis ist.*

2. *Der Kreis hat zum Quadrat seines Durchmessers nahezu ein Verhältnis wie 11 : 14.*

3. *Der Umfang eines jeden Kreises ist dreimal so groß wie der Durchmesser und noch um etwas größer, nämlich um weniger als $^{1}/_{7}$, aber um mehr als $^{10}/_{71}$ des Durchmessers.*

Hiermit war der Wert $\pi = 3\,^{1}/_{7}$ gewonnen, der schnell den alten ägyptischen Wert $(^{16}/_{9})^2$ verdrängte und für Jahrhunderte als der Näherungswert für π beibehalten wurde.

In der römischen Literatur ist ein Fortschritt für die Kreisberechnung nicht zu verzeichnen. Bei **Vitruvius** (um 14 v.Chr.) wird einmal der Umfang eines Rades, dessen Durchmesser mit 4 *pes* angegeben wird, mit 12 ½ *pes* berechnet (*de architectura* X 14); der dabei verwendete Wert $\pi = 3\,^{1}/_{8}$ ist nur sehr bedingt richtig, aber dem römischen Duodezimalsystem gut angepasst. Bei **Columella** (*de re rustica* V 2, 7 ff.) und den Autoren des *corpus agrimensorum* finden sich die archimedischen Werte.

Noch unfruchtbarer für die Geschichte der Kreisberechnung ist das frühe Mittelalter. So wird in den *propositiones ad acuendos iuvenes* (TEXT 7) die Kreisfläche der Fläche des umbeschriebenen Quadrates gleichgesetzt, was einem Wert $\pi = 4$ entspricht.

Erst im 16. Jh. (**Valentinus Otho** ~1550–1605) wurde der archimedische Näherungswert $^{22}/_{7}$ durch den exakteren Wert $\pi = {}^{355}/_{133}$ an Genauigkeit übertroffen.

Beispiele antiker Unterhaltungsmathematik mit Lösungen (Text 7)

Um zu verstehen, welche Aspekte der Mathematik für den Römer wichtig waren, ist es hilfreich, sich mit Aufgaben zu befassen, die dem Bereich der Unterhaltungsmathematik zuzuzählen sind. Solche Aufgaben dienten der Unterrichtung von Priestern, Beamten und Schülern; dazu zählen auch Denksportaufgaben, die sich in entsprechend gebildeten Kreisen seit jeher großer Beliebtheit erfreuten. Die älteste Sammlung solcher Aufgaben in lateinischer Sprache ist der folgende Text.

Abschluss eines Geschäftes am Rechentisch. Holzschnitt 16. Jh.

TEXT 7 propositiones ad acuendos iuvenes

Die *propositiones ad acuendos iuvenes* sind die älteste und vielleicht auch wichtigste Sammlung der Unterhaltungsmathematik in lateinischer Sprache. Auf Grund handschriftlicher Untersuchungen, die Menso Folkerts, von dem die bisher einzige textkritische Ausgabe dieses Werkes stammt (Öst. Ak. der Wissenschaften, math. naturwiss. Kl. Denkschriften. Bd. 116, Abh. 6), anstellte, ist diese Schrift im 9. Jahrhundert n.Chr. in Frankreich entstanden. Als Verfasser vermutet Folkerts **Alkuin**, den wissenschaftlichen Berater Karls d.Großen, der in seinen Gedichten eine große Vorliebe für die Mathematik und ihre Anwendungen zeigte.

Die *propositiones* können ihre Beziehungen zur klösterlichen Welt nicht verleugnen. So handelt die Aufgabe 30 von einer Basilika, deren Boden mit Steinen ausgelegt werden soll. In Aufgabe 47 verteilt ein Bischof Brote unter seinem Klerus, und es wird nach der Zahl der *presbyteri, diaconi* und *lectores* gefragt. Ganz ähnlich in Aufgabe 53: Hier sind es eine Anzahl Eier, die der Abt seinen Mönchen zuweist. Auch die Einkleidungen der übrigen Aufgaben passen gut in den durch die vermutliche Entstehungszeit geprägten Rahmen: Handwerk und Handel spielen nur eine sekundäre Rolle; Motive aus dem Landleben überwiegen. Auch die genannten Gegenstände und Tiere gehören in diesen Bereich. Nur an einer Stelle (Aufgabe 13) deuten Soldaten auf kriegerische Auseinandersetzungen hin.

Natürlich sind in die *propositiones* auch andersartige Elemente eingeflossen. Aufgabe 52 könnte auf frühe Beziehungen zum islamischen Kulturkreis hindeuten. Die Erbschaftsaufgaben (12, 35, 51), sowie die vier Aufgaben über die Verwandschaftsgrade (11, 11a, 11b, 11c) entstammen der römischen Gedankenwelt und bestätigen, dass die *propositiones* in der Tradition der Römer stehen. Noch eine weitere Aufgabengruppe steht in römischer Tradition: Die Flächenberechnungen (22, 23, 24, 25, 27, 28, 29). Diese sind entsprechenden Aufgaben der römischen Feldmesser, *agrimensores*, nachgebildet.

Möglicherweise sind die *propositiones* auch von spätgriechisch-byzantinischen Aufgabensammlungen beeinflusst. Hier muss man vor allem an die arithmetischen Epigramme in der **Anthologia Palatina** (Buch XIV) denken. In der griechischen Anthologie nehmen wie in den *propositiones* die Hau-Rechnungen einen überaus breiten Raum ein.

Zusammenfassend lassen sich drei Wurzeln der *propositiones ad acuendos iuvenes* erkennen: In erster Linie stehen sie in der römischen Tradition; daneben sind griechisch-byzantinische und arabische Einflüsse anzunehmen.

64/65

66/67

68

69

70

71

72

73/74

Blatt 203 des **Codex Leidensis** des Ademar aus dem Jahr 1023. Neben anderen Texten enthält diese illustrierte Handschrift auch einen Großteil der *propositiones ad acuendos iuvenes*. Ohne Trennung oder Überschrift schließen sich an Äsops Fabeln die Rechenrätsel der *propositiones* an. Auf dem vorliegenden Blatt folgen auf die Fabel „Der Adler heiratet den Hühnerhabicht" (Nr. 67) die Aufgaben *de limace* (Nr. 68), *de viro ambulante in via* (Nr. 69), *de duobus proficiscentibus visis ciconiis* (Nr. 71), *de homine et equis in campo pascentibus* (Nr. 72), *de emptore in C denariis* (Nr. 73), *de duobus negotiatoribus C solidos communes habentibus* (Nr. 74). Die Zeichnung zur Aufgabe *de limace* zeigt eine Schnecke und eine Schwalbe; Augen und Füße der Schnecke sind eingezeichnet, nur die Fortsetzung ihres Leibes hinter dem Schneckenhaus ist nicht sichtbar. Die Schnecke kriecht auf das von der Schwalbe bereitgestellte Frühstück zu. Dieses besteht aus einem hohen und einem niedrigen Trinkgefäß, einem ganzen und einem halben Brot. Die Schwalbe fliegt der ankommenden Schnecke entgegen. Die neben dem Bild stehenden Zeichen gehören zur Ausrechnung der Aufgabe. Sie bestätigen, dass man *passus* als den Raum zwischen der Fußspitze des zurückgesetzten und der Ferse des vorangesetzten Fußes ansah. Ebenso wie der *passus* haben auch *pes* und *uncia* ihre zierlichen Zeichen.

(1) PROPOSITIO DE LIMACE

Limax fuit ab hirundine invitatus ad prandium infra leuvam unam. In die autem non potuit plus quam unam unciam pedis ambulare. Dicat, qui velit, in quot diebus ad idem prandium ipse limax perambulaverit.

SOLUTIO DE LIMACE

In leuva una sunt mille quingenti passus, $\overline{\text{VII}}$ D pedes, XC unciae. Quot unciae, tot dies fuerunt, qui faciunt annos CCXLVI et dies CCX.

(2) PROPOSITIO DE VIRO AMBULANTE IN VIA

Quidam vir ambulans per viam vidit sibi alios homines obviantes et dixit eis: volebam, ut fuissetis alii tantum, quanti estis, et medietas medietatis, et rursus de medietate medietas; tunc una mecum C fuissetis. Dicat, qui vult, quot fuerint, qui in primis ab illo visi sunt.

SOLUTIO

Qui imprimis ab illo visi sunt, fuerunt XXXVI. Alii tantum fiunt LXXII, medietas medietatis sunt XVIII, et huius numeri medietas sunt VIIII. Dic ergo sic: LXXII et XVIII fiunt XC. Adde VIIII, fiunt XCVIIII. Adde loquentem, et habebis C.

(3) PROPOSITIO DE DUOBUS PROFICISCENTIBUS VISIS CICONIIS

Duo viri ambulantes per viam videntes ciconias dixerunt inter se: Quot sunt? Qui conferentes numerum dixerunt: Si essent aliae tantae et ter tantae et medietas tertii, adiectis duabus C essent. Dicat, qui potest, quantae fuerunt, quae imprimis ab illis visae sunt.

SOLUTIO DE CICONIIS

XXVIII et XXVIII et tertio sic fiunt LXXXIIII, et medietas tertii fiunt XIIII. Sunt in totum XCVIII. Adiectis duabus C apparent.

(4) PROPOSITIO DE HOMINE ET EQUIS IN CAMPO PASCENTIBUS

Quidam homo videns equos pascentes in campo optavit dicens: Utinam fuissetis mei, et essetis alii tantum, et medietas medietatis: certe gloriarer super

AUFGABEN ZUM ANSPORN DER JUGEND

Über die Schnecke

Eine Schnecke war von einer Schwalbe zum Frühstück eingeladen, eine *leuva* weit. An einem Tag konnte sie nicht weiter als eine *uncia* gehen. Es sage, wer will, in wie vielen Tagen die Schnecke zu diesem Frühstück gewandert ist.

Lösung

In einer *leuva* sind 1500 *passus*, 7500 *pedes* oder 90000 *unciae* enthalten. Wieviele *unciae*, soviele Tage waren es, und das ergibt 246 Jahre und 210 Tage.

Von einem Mann, der auf der Straße spazierte

Ein Mann, der auf der Straße ging, sah, dass ihm andere Menschen entgegenkommen, und er sagte zu ihnen: „Ich wollte, dass ihr doppelt so viele wäret, wie ihr seid, und dann noch die Hälfte der Hälfte und wiederum die Hälfte der Hälfte; dann wäret ihr zusammen mit mir 100." Es sage, wer will, wieviele Menschen von jenem zuerst gesehen wurden.

Lösung

Die, die zuerst von jenem gesehen wurden, waren 36. Noch einmal soviele macht 72, die Hälfte der Hälfte sind 18, und die Hälfte dieser Zahl ist 9. Rechne nun folgendermaßen: 72 und 18 addiert ergibt 90. Addiere 9, so ergibt sich 99. Addiere den Sprecher, und du wirst 100 haben.

Über zwei Wanderer, die Störche erblicken

Zwei Männer wanderten einen Weg entlang und sahen Störche. Da sagten sie zu sich: „Wie viele sind es?" Sie verglichen die Anzahl und sagten: „Wenn es noch einmal so viele wären und ein drittes Mal so viele und die Hälfte des Drittels, wenn zwei noch dazukämen, wären es hundert." Es sage, wer kann, wie viele von ihnen gesehen wurden.

Lösung

28 und 28 und zum dritten Mal soviel ergibt 84, und die Hälfte des Drittels beträgt 14. Das ergibt im Ganzen 98. Fügt man noch 2 hinzu, so ergibt sich 100.

Von einem Mann und Pferden, die auf einer Wiese weiden

Ein Mann sah Pferde auf einer Wiese weiden. Er wünschte sich, indem er sagte: „Wenn ihr doch mein wäret und wäret noch einmal soviele und die Hälfte von der Hälfte: Dann equos C. Discernat, qui vult, quot equos imprimis vidit ille homo pascentes.

SOLUTIO DE EQUIS

XL equi erant, qui pascebant. Alii tantum fiunt LXXX. Medietas huius medietatis, id est XX, si addatur, fiunt C.

(5) PROPOSITIO DE EMPTORE IN C DENARIIS

Dixit quidam emptor: Volo de centum denariis C porcos emere; sic tamen, ut verres X denariis ematur, scrofa autem V denariis, duo vero porcelli denario uno. Dicat, qui intelligit, quot verres, quot scrofae, quotve porcelli esse debeant, ut in neutris nec superabundet numerus nec minuatur.

SOLUTIO DE EMPTORE

Fac VIIII scrofas et unum verrem in quinquaginta quinque denariis, et LXXX porcellos in XL. Ecce porci XC. In quinque residuis denariis fac porcellos X, et habebis centenarium in utrisque numerum.

(6) PROPOSITIO DE DUOBUS NEGOTIATORIBUS C SOLIDOS COMMUNES HABENTIBUS

Fuerunt duo negotiatores habentes C solidos communes, quibus emerent porcos. Emerunt autem in solidis duobus porcos V volentes eos saginare atque iterum venundare et in solidis lucrum facere. Cumque vidissent tempus non esse ad saginandos porcos et ipsi eos non valuissent tempore hiemali pascere, temptaverunt venundando, si potuissent, lucrum facere, sed non potuerunt, quia non valebant eos amplius venundare, nisi ut empti fuerant, id est, ut de V porcis duos solidos acciperent. Cum hoc conspexissent, dixerunt ad invicem: Dividamus eos. Dividentes autem et vendentes, sicut emerant, fecerunt lucrum. Dicat, qui valet, imprimis quot porci fuerunt, et dividat et vendat ac lucrum faciat, quod facere de simul venditis non valuit.

SOLUTIO DE PORCIS

Imprimis CCL porci erant, qui C solidis sunt comparati, sicut supra dictum est, duobus solidis V porcos: quia sive quinquagies quinos sive quinquies L duxeris, CCL numerabis. Quibus divisis unus tulit CXXV, alter similiter. Unus vendidit deteriores tres semper in solido, alter vero meliores duos in solido. Sic evenit, ut is, qui deteriores vendidit, de CXX porcis XL solidos est consecutus, qui vero meliores, LX solidos est consecutus, quia de inferioribus XXX

könnte ich mich insgesamt über hundert Pferde freuen.“ Es entscheide, wer will, wieviele Pferde jener Mann zuerst weiden sah.

Lösung

Es waren 40 Pferde, die weideten; noch einmal soviele ergeben 80; wenn die Hälfte der Hälfte, das heißt 20, addiert wird, so ergibt sich 100.

Von einem, der um 100 Denare einkaufte

Ein Käufer sagte: „Ich will um 100 Denare 100 Schweine kaufen, doch so, dass ein Eber um 10 Denare, eine Zuchtsau um 5 Denare und zwei Ferkel um 1 Denar gekauft werden.“ Es soll sprechen, wer erkennt, wieviele Eber, wieviele Zuchtsäue und wieviele Ferkel es sein müssen, wobei die Zahl der Denare und der Schweine weder über- noch unterschritten wird.

Lösung

Rechne 9 Zuchtsäue und einen Eber um 55 Denare und 80 Ferkel um 40 Denare. Siehe, es sind 90 Schweine. Rechne 10 Ferkel um die restlichen 5 Denare, und du wirst bei beiden die Zahl 100 erhalten.

Über zwei Kaufleute, die 100 solidi gemeinsam besaßen

Es waren zwei Kaufleute, die zusammen 100 *solidi* besaßen, mit denen sie Schweine kaufen wollten. Sie kauften sie aber zu einem Preis von zwei *solidi* für fünf Schweine. Sie wollten diese füttern und wiederum verkaufen und bezüglich der *solidi* einen Gewinn machen. Als sie aber sahen, dass sie keine Zeit hätten, die Schweine zu füttern, und selbst nicht imstande wären, diese in der Winterzeit zu versorgen, versuchten sie, ob sie durch deren Verkauf einen eventuellen Gewinn machen könnten, aber sie konnten es nicht, weil sie sie um keinen höheren Preis verkaufen konnten, als sie sie gekauft hatten, das heißt, dass sie für fünf Schweine zwei *solidi* bekämen. Als sie dies erkannt hatten, sagten sie zueinander: „Lass sie uns teilen!“ Sie teilten sie aber in zwei gleich große Gruppen und verkauften sie um denselben Preis, um den sie sie gekauft hatten, und machten einen Gewinn. Es soll sagen, wer kann, wieviele Schweine es zu Beginn waren, und er soll diese Zahl teilen, sowie den Verkaufspreis und den Gewinn ausrechnen, den er beim sofortigen Verkauf nicht erzielen konnte.

Lösung

Zu Beginn waren es 250 Schweine, die um 100 *solidi* gekauft wurden, 5 Schweine um 2 *solidi*, wie vorhin gesagt wurde: wenn du 50 mal 5 oder 5 mal 50 rechnest, du wirst das Ergebnis 250 erhalten. Nach deren Teilung erhielt der eine 125, der andere ebenfalls 125. Einer verkaufte je 3 minderwertige Schweine immer um einen *solidus*, der andere aber je zwei höherwertige ebenfalls um einen *solidus*. So kam es, dass der, der die minderwertigen Schweine verkaufte, für 120 Schweine 40 *solidi* erhielt, und der, der die höherwertigen verkaufte, für 120 Schweine 60 *solidi* erhielt, weil 30 von den semper in X solidis, de melioribus autem XX in X solidis sunt venundati. Et remanserunt utrisque V porci, ex quibus ad lucrum IIII solidos et duos denarios facere potuerunt.

(7) PROPOSITIO DE DISCO PENSANTE LIBRAS XXX

Est discus qui pensat libras XXX sive solidos DC habens in se aurum, argentum, auricalcum et stagnum. Quantum habet auri, ter tantum argenti; quantum argenti, ter tantum auricalci; quantum auricalci, ter tantum stagni. Dicat, qui potest, quantum unaquaeque species penset.

SOLUTIO DE DISCO

Aurum pensat uncias novem. Argentum pensat ter VIIII uncias, id est libras duas et tres uncias. Auricalcum pensat ter libras duas et ter III uncias, id est libras VI et uncias VIIII. Stagnum pensat ter libras VI et ter VIIII uncias, hoc est libras XX et III uncias. VIIII unciae et II librae cum III unciis et VI librae cum VIIII unciis et XX librae cum III unciis adunatae XXX libras efficiunt.
Item aliter ad solidos. Aurum pensat solidos XV. Argentum ter XV, id est XLV. Auricalcum ter XLV, id est CXXXV. Stagnum ter CXXXV, hoc est CCCCV. Iunge CCCCV et CXXXV et XLV et XV, et invenies solidos DC, qui sunt librae XXX.

(8) PROPOSITIO DE CUPA

Est cupa una, quae C metretis impletur capientibus singulis modia tria habens fistulas III. Ex numero modiorum tertia pars et sexta per unam fistulam currit, per alteram tertia pars sola, per tertiam sexta tantum. Dicat, qui vult, quot sextarii per unamquamque fistulam cucurrissent.

SOLUTIO

Per primam fistulam $\overline{\text{III}}$ DC sextarii cucurrerunt, per secundam II CCCC, per tertiam I CC.

(9) PROPOSITIO DE SAGO.

Habeo sagum habentem in longitudine cubitos C et in latitudine LXXX. Volo exinde per portiones sagulos facere, ita ut unaquaeque portio habeat in longitudine cubitos V et in latitudine cubitos IIII. Dic, rogo, sapiens, quot saguli exinde fieri possint.

minderwertigen und zwanzig von den höherwertigen immer um 10 *solidi* verkauft wurden. Beiden blieben 5 Schweine, mit denen sie einen Gewinn von 4 *solidi* und 2 Denaren machen konnten.

Von einer Wurfscheibe, die 30 librae wiegt

Gegeben ist eine Wurfscheibe, die 30 *librae*, das sind 600 *solidi*, wiegt, bestehend aus Gold, Silber, Messing und Zinn. Wieviel Gold sie hat, dreimal soviel Silber hat sie, wieviel Silber, dreimal soviel Messing, und wieviel Messing, dreimal soviel Zinn. Es sage, wer kann, wieviel jeder einzelne Bestandteil wiegt.

Lösung

Gold wiegt 9 *unciae*. Silber wiegt dreimal 9 *unciae*, das heißt 2 *librae* und 3 *unciae*. Messing wiegt dreimal 2 *librae* und dreimal 3 *unciae*, das heißt 6 *librae* und 9 *unciae*. Zinn wiegt dreimal 6 *librae* und dreimal 9 *unciae*, das heißt 20 *librae* und 3 *unciae*. 9 *unciae* und 2 *librae* mit 3 *unciae* und 6 *librae* mit 9 *unciae* und 20 *librae* mit 3 *unciae* addiert ergeben 30 *librae*.
Ebenso anders nach *solidi* gerechnet. Gold wiegt 15 *solidi*, Silber dreimal 15, das sind 45, Messing dreimal 45, das sind 135 und Zinn dreimal 135, das sind 405 *solidi*. Addiere 405, 135, 45 und 15, und du wirst 600 *solidi* erhalten, die 30 *librae* entsprechen:

Von einem Fass

Gegeben ist ein Fass, das einen Inhalt von 100 *metretae* hat, wobei je eine *metreta* drei *modia* entspricht und drei Rohre. Durch das erste Rohr fließen ein Drittel und ein Sechstel der *modia* zu, durch das zweite nur ein Drittel, durch das dritte nur ein Sechstel. Es sage, wer will, wieviele *sextarii* durch jedes Rohr geflossen sind.

Lösung

Durch das erste Rohr flossen 3600 *sextarii*, durch das zweite 2400 und durch das dritte 1200.

Von einem Tuch

Ich habe ein Stofftuch, das in der Länge 100 *cubiti* und in der Breite 80 *cubiti* misst. Daraus will ich durch Teilung kleine Tücher machen, so dass jeder Teil in der Länge 5 *cubiti* und in der Breite 4 *cubiti* misst. Sag nun bitte, Schlauer, wieviele kleine Tücher daraus entstehen können.

SOLUTIO

De quadringentis octogesima pars V sunt et centesima IIII. Sive ergo octogies V sive centies IIII duxeris, semper CCCC invenies. Tot sagi erunt.

Lösung

Der achtzigste Teil von 400 ist 5, der hundertste ist 4; wenn du achtzigmal 5, oder hundertmal 4 rechnest, immer wirst du 400 erhalten. Ebensoviele kleine Tücher werden es sein.

(10) PROPOSITIO DE LINTEO

Habeo linteamen unum longum cubitorum LX, latum cubitorum XL. Volo ex eo portiones facere, ita ut unaquaeque portio habeat in longitudine cubitos senos et in latitudine quaternos, ut sufficiat ad tunicam consuendam. Dicat, qui vult, quot tunicae exinde fieri possint.

Von einem Stück Leinen

Ich habe ein Stück Leinen 60 *cubiti* lang und 40 *cubiti* breit. Ich will daraus Teile machen, so dass jeder Teil in der Länge 6 *cubiti* und in der Breite 4 *cubiti* misst, damit er für die Herstellung einer Tunika ausreicht. Es sage, wer will, wieviele Tuniken daraus gemacht werden können.

SOLUTIO

Decima pars sexagenarii VI sunt, decima vero quadragenarii IIII sunt. Sive ergo decimam sexagenarii sive decimam quadragenarii decies miseris, centum portiones VI cubitorum longas et IIII cubitorum latas invenies.

Lösung

Der zehnte Teil von 60 ist 6, der zehnte von 40 ist 4. Wenn du nun den zehnten Teil von 60, oder den zehnten von 40 mit 10 multiplizierst, so wirst du 100 Stücke 6 *cubiti* lang und 4 *cubiti* breit erhalten.

(11) PROPOSITIO DE DUOBUS HOMINIBUS SINGULAS SORORES ACCIPIENTIBUS

Si duo homines ad invicem alter alterius sororem in coniugium sumpserit, dic, rogo, qua propinquitate filii eorum sibi pertineant.

Von zwei Männern, die jeweils die Schwester des anderen heiraten

Wenn zwei Männer untereinander jeder die Schwester des anderen geheiratet haben, sag, bitte, in welchem verwandtschaftlichen Verhältnis deren Söhne zueinander stehen.

(11a) PROPOSITIO DE DUOBUS HOMINIBUS SINGULAS MATRES ACCIPIENTIBUS

Si duo homines alter alterius matrem similiter in coniugium sumpserit, quali cognatione filii eorum sibi coniungantur?

Von zwei Männern, die jeweils die Mutter des anderen heiraten

Wenn zwei Männer auf ähnliche Weise jeder die Mutter des anderen geheiratet haben, in welchem verwandtschaftlichen Verhältnis stehen deren Söhne zueinander?

(11b) PROPOSITIO DE PATRE ET FILIO ET VIDUA EIUSQUE FILIA

Si relictam vel viduam et filiam illius in coniugium ducant pater et filius, sic tamen, ut filius accipiat matrem et pater filiam, filii, qui ex his fuerint procreati, dic, quaeso, quali cognatione sibi iungantur.

Von einem Vater und seinem Sohn, einer Witwe und ihrer Tochter

Wenn ein Vater und sein Sohn eine verlassene Frau oder Witwe und ihre Tochter heiraten, doch so, dass der Sohn die Mutter und der Vater die Tochter heiratet, sag bitte, in welchem verwandtschaftlichen Verhältnis die Söhne, die von ihnen gezeugt wurden, zueinander stehen.

(12) PROPOSITIO DE QUODAM PATREFAMILIAS ET TRIBUS FILIIS EIUS

Quidam paterfamilias moriens dimisit in hereditate tribus filiis suis XXX ampullas vitreas, quarum decem fuerunt plenae oleo, aliae decem dimidiae, tertiae decem vacuae. Dividat, qui potest, oleum et ampullas, ut unicuique eorum de tribus filiis aequaliter obveniat tam de vitro quam de oleo.

Von einem Familienvater und seinen drei Söhnen

Ein Familienvater vererbte auf dem Totenbett seinen drei Söhnen 30 gläserne Flaschen, von denen 10 zur Gänze, 10 weitere zur Hälfte mit Öl gefüllt waren, die restlichen 10 aber leer waren. Es teile, wer kann, das Öl und die Flaschen, so dass einem jeden der drei Söhne die gleiche Menge an Glas wie an Öl zuteil wird.

SOLUTIO

Tres igitur sunt filii et XXX ampullae. Ampullarum autem quaedam X sunt plenae et X mediae et X vacuae. Duc ter decies, fiunt XXX. Unicuique filio veniunt X ampullae in portionem. Divide autem per tertiam partem, hoc est, da primo filio X semiplenas ampullas, ac deinde da secundo V plenas et V vacuas, similiterque dabis tertio, et erit trium aequa germanorum divisio tam in oleo quam in vitro.

Lösung

Es gibt 3 Söhne und 30 Flaschen. 10 Flaschen sind voll, 10 sind halbvoll und 10 sind leer. Rechne dreimal 10, macht 30. Auf einen jeden Sohn kommen bei der Teilung 10 Flaschen. Teile aber auch den Inhalt durch 3, das heißt, gib dem ersten Sohn 10 halbvolle Flaschen, dann dem zweiten 5 volle und 5 leere und dem dritten das gleiche; dann wird die Teilung unter den drei Brüdern gerecht sein sowohl bezüglich des Öls als auch bezüglich der Flaschen.

80

81

Blatt 205r des Codex Leidensis des Ademar aus dem Jahr 1023. Auf der unteren Hälfte dieses Blattes findet sich die Ausrechnung der Aufgabe *de rege et eius exercitu*.

(13) PROPOSITIO DE REGE ET EIUS EXERCITU

Quidam rex iussit famulo suo colligere de XXX villis exercitum eo modo, ut ex unaquaque villa tot homines sumeret quotquot illuc adduxisset. Ipse tamen ad primam villam solus venit, ad secundam cum altero; iam ad tertiam tres venerunt. Dicat, qui potest, quot homines fuissent collecti de his XXX villis.

SOLUTIO

In prima igitur mansione duo fuerunt, in secunda IIII, in tertia VIII, in quarta XVI, in quinta XXXII, in sexta LXIIII, in septima CXXVIII, in octava CCLVI, in nona DXII, in decima I XXIIII, in undecima II XLVIII, in duodecima IIII XCVI, in tertia decima VIII CXCII, in quarta decima XVI CCCLXXXIIII, in quinta decima XXXII DCCLXVIII, in sexta decima LXV DXXXVI, in septima decima CXXXI LXXII, in octava decima CCLXII CXLIIII, in nona decima DXXIIII CCLXXXVIII, in vicesima mille milia XLVIII DLXXVI, in vicesima prima bis mille milia XCVII CLII, in vicesima secunda quater mille milia CXCIIII CCCIIII, in vicesima tertia octies mille milia CCCLXXXVIII DCVIII, in vicesima quarta XVI mille milia DCCLXXVII CCXVI, in vicesima quinta XXXIII mille milia DLIIII CCCCXXXII, in vicesima sexta LXVII mille milia CVIII DCCCLXIIII, in vicesima septima CXXXIIII mille milia CCXVII DCCXXVIII, in vicesima octava CCLXVIII mille milia CCCCXXXV CCCCLVI, in vicesima nona DXXXVI mille milia DCCCLXX DCCCCXII, in tricesima villa milies LXXIII mille milia DCCXLI DCCCCXXIIII.

Von einem König und seinem Heer

Ein König befahl seinem Diener, aus 30 Städten ein Heer zu sammeln derart, dass er in jeder Stadt soviele Menschen aushebe, wieviele er dorthin führe. Er selbst jedoch kam zur ersten Stadt allein, zur zweiten mit einem zweiten; zur dritten kamen mit ihm schon drei. Es sage, wer kann, wieviele Menschen in diesen 30 Städten ausgehoben wurden.

Lösung

Bei der ersten Station waren es 2, bei der zweiten 4, bei der dritten 8, bei der vierten 16, bei der fünften 32, bei der sechsten 64, bei der siebten 128, bei der achten 256, bei der neunten 512, bei der zehnten 1024, bei der elften 2048, bei der zwölften 4096, bei der dreizehnten 8192, bei der vierzehnten 16384, bei der fünfzehnten 32768, bei der sechzehnten 65536, bei der siebzehnten 131072, bei der achtzehnten 262144, bei der neunzehnten 524288, bei der zwanzigsten 1048576, bei der einundzwanzigsten 2097152, bei der zweiundzwanzigsten 4194304, bei der dreiundzwanzigsten 8388608, bei der vierundzwanzigsten 16777216, bei der fünfundzwanzigsten 33554432, bei der sechsundzwanzigsten 67108864, bei der siebenundzwanzigsten 134217728, bei der achtundzwanzigsten 268435456, bei der neunundzwanzigsten 536870912, in der dreißigsten Stadt waren es 1073741824.

(14) PROPOSITIO DE BOVE

Bos qui tota die arat, quot vestigia faciat in ultima riga?

SOLUTIO

Nullum omnino vestigium bos in ultima riga facit, eo quod ipse praecedit aratrum et hunc aratrum sequitur. Quotquot enim hic praecedendo inexculta terra vestigia figit, tot illud subsequens excolendo resolvit. Propterea illius omnino nullum reperitur in ultima riga vestigium.

Von einem Rind

Wieviele Spuren hinterlässt ein Rind, das den ganzen Tag pflügt, in der letzten Furche?

Lösung

Das Rind hinterlässt überhaupt keine Spur in der letzten Furche, deshalb weil es selbst dem Pflug vorausgeht und der Pflug ihm folgt. Denn wieviele Spuren es auch immer beim Vorangehen in der umgepflügten Erde hinterlässt, ebensoviele verwischt jener nachfolgend beim Pflügen. Deshalb findet man in der letzten Furche.überhaupt keine Spur von jenem.

(15) PROPOSITIO DE HOMINE

Quaero a te, ut dicas mihi, quot rigas factas habeat homo in agro suo, quando de utroque capite campi tres versuras factas habuerit.

Von einem Mann

Ich frage dich, dass du mir sagst, wieviele Furchen ein Mann auf seinem Acker hinterlässt, wenn er an jeder Längsseite seines Feldes drei Wendungen vorgenommen hat.

SOLUTIO

Ex uno capite campi III, ex altero III, quae faciunt rigas versuras VII.

Lösung

Auf der einen Seite des Feldes macht er drei Wendungen und auf der anderen ebenfalls drei, das ergibt sieben Furchen.

(16) PROPOSITIO DE DUOBUS HOMINIBUS BOVES DUCENTIBUS

Von zwei Männern, die Rinder führten

Duo homines ducebant boves per viam, e quibus unus alteri dixit: Da mihi boves duos, et habebo tot boves, quot et tu habes. At ille ait: Da mihi, inquit, et tu duos boves, et habebo duplum quam tu habes. Dicat, qui velit, quot boves fuerunt, quot unusquis-que habuit.

Zwei Männer führten Rinder auf der Straße. Einer von ihnen sagte zum anderen: „Gib mir zwei Rinder, und ich werde ebenso viele Rinder haben wie du!“ Aber jener sagte: „Gib mir nun deinerseits zwei Rinder, und ich werde doppelt so viele haben wie du!“ Es sage, wer will, wieviele Rinder es waren, die ein jeder hatte.

SOLUTIO

Prior, qui dari sibi duos rogavit, boves habebat IIII. At vero, qui rogabatur, habebat VIII. Dedit quippe rogatus postulanti duos, et habuerunt uterque sex. Qui enim prior acceperat, reddidit duos danti priori, qui habebat sex, et habuit VIII, quod est duplum a quattuor, et illi remanserunt IIII, quod est simplum ab VIII.

Lösung

Zu Beginn hatte der, der bat, dass ihm zwei Rinder gegeben werden, 4 Stück. Der aber, der gebeten wurde, hatte acht. Der allerdings, der gebeten wurde, gab dem anderen auf seine Forderung hin zwei Rinder, und beide hatten 6 Stück. Derjenige, der die Rinder zuvor empfangen hatte, gab dem vormaligen Geber, der nun 6 Rinder hatte, wieder zwei zurück; somit hatte dieser wieder acht Rinder, was das Doppelte von vier ist, und jenem blieben vier Rinder, was die Hälfte von 8 ist.

(17) PROPOSITIO DE TRIBUS FRATRIBUS SINGULAS HABENTIBUS SORORES

Von drei Brüdern, die je eine Schwester hatten

Tres fratres erant, qui singulas sorores habebant et fluvium transire debebant. Erat enim unicuique illorum concupiscentia in sorore proximi sui. Qui venientes ad fluvium non invenerunt nisi parvam naviculam, in qua non poterant amplius nisi duo ex illis transire. Dicat, qui potest, qualiter fluvium transierunt, ut ne una quidem earum ex ipsis maculata sit.

Es waren drei Brüder, die je eine Schwester hatten, und einen Fluss überqueren mussten. Ein jeder von ihnen begehrte die Schwester seines Nächsten. Als sie zu dem Fluss kamen, fanden sie nur ein kleines Schiff, in dem nur zwei von ihnen übersetzen konnten. Es sage, wer kann, wie sie den Fluss überquerten, ohne dass eine der Frauen von den Männern belästigt wurde.

SOLUTIO

Primo omnium ego et soror mea introissemus in navem et transfretassemus ultra, transfretatoque fluvio dimisissem sororem meam de navi et reduxissem navem ad ripam. Tunc vero introissent sorores duorum virorum, illorum videlicet, qui ad litus remanserant. Illis itaque feminis navi egressis soror mea, quae prima transierat, intraret ad me navemque reduceret. Illa egrediente foras duo in navem fratres intrassent ultraque venissent. Tunc unus ex illis una cum sorore sua navem ingressus ad nos transfretasset. Ego autem et ille, qui navigaverat, sorore mea remanente foris ultra venissemus. Nobisque ad litora vectis una ex illis duabus quaelibet mulieribus ultra navem reduceret, sororeque mea secum recepta pariter ad nos ultra venissent. Et ille, cuius soror ultra remanserat, navem ingressus eam secum ultra reduceret. Et fieret expleta transvectio nullo maculante contagio.

Lösung

Als erste von allen würden ich und meine Schwester das Schiff besteigen und hinüberfahren. Nach Überqueren des Flusses würde ich meine Schwester aus dem Schiff aussteigen lassen und das Schiff ans andere Ufer zurückfahren. Dann aber würden die Schwestern jener zwei Männer, die am Ufer zurückgeblieben waren, das Schiff besteigen. Nachdem nun jene Frauen am anderen Ufer das Schiff verlassen hatten, würde meine Schwester, die als erste übergesetzt hatte, das Schiff besteigen und zu mir zurückbringen. Wenn jene aussteigt, würden die zwei Brüder das Schiff besteigen und übersetzen. Dann würde einer von ihnen zusammen mit seiner Schwester das Schiff besteigen und zu uns übersetzen. Ich und jener, der im Schiff war, würden ans andere Ufer fahren, wobei meine Schwester zurückbleibt. Sobald wir gelandet sind, würde die andere der zwei Frauen das Schiff zurückbringen und, nachdem sie meine Schwester bei sich aufgenommen hat, wieder zu uns ans andere Ufer kommen. Und jener, dessen Schwester am anderen Ufer zurückgeblieben war, würde das Schiff besteigen und sie dann mit sich zurückbringen. Und es würde ein vollständiges Übersetzen sein, ohne dass es zu einer unzüchtigen Berührung käme.

(18) PROPOSITIO DE LUPO ET CAPRA ET FASCICULO CAULI

Homo quidam debebat ultra fluvium transferre lupum et capram et fasciculum cauli, et non potuit aliam navem invenire, nisi quae duos tantum ex ipsis ferre valebat. Praeceptum itaque ei fuerat, ut omnia haec ultra omnino illaesa transferret. Dicat, qui potest, quomodo eos illaesos ultra transferre potuit.

SOLUTIO

Simili namque tenore ducerem prius capram et dimitterem foris lupum et caulum. Tum deinde venirem lupumque ultra transferrem, lupoque foras misso rursus capram navi receptam ultra reducerem, capraque foras missa caulum transveherem ultra, atque iterum remigassem, capramque assumptam ultra duxissem. Sicque faciente facta erit remigatio salubris absque voragine lacerationis.

Von einem Wolf, einer Ziege und einem Bündel Kohl

Ein Mann musste einen Wolf, eine Ziege und ein Bündel Kohl über einen Fluss bringen und konnte kein anderes Schiff finden außer einem, das nur zwei von ihnen tragen konnte. Es war ihm nun aufgetragen worden, dass er dies alles völlig unversehrt ans andere Ufer bringe. Es sage, wer kann, wie er diese unversehrt übersetzen konnte.

Lösung

Auf gleiche Art würde ich zuerst die Ziege übersetzen und den Wolf und den Kohl zurücklassen. Dann würde ich zurückkommen und den Wolf übersetzen. Sobald der Wolf das Schiff verlassen hat, würde ich die Ziege wieder ins Schiff aufnehmen und ans andere Ufer zurückbringen. Sobald ich die Ziege ausgeladen habe, würde ich das Bündel Kohl ans andere Ufer bringen, wieder zurückrudern, die Ziege aufnehmen und übersetzen. Wenn ich so vorgehe, wird das Übersetzen vorteilhaft verlaufen ohne Gefahr für den Einzelnen, gefressen zu werden.

(19) PROPOSITIO DE VIRO ET MULIERE PONDERANTIBUS PLAUSTRUM

De viro et muliere, quorum uterque pondus habebat plaustri onusti, duos habentes infantes inter utrosque plaustrali pondere pensantes flumen transire debuerunt. Navem invenerunt, quae non poterat ferre plus nisi unum pondus plaustri. Transfretari faciat, qui se putat posse, ne navis mergatur.

SOLUTIO

Eodem quoque ordine, ut superius: Prius intrassent duo infantes et transissent, unusque ex illis reduceret navem. Tunc mater navem ingressa transisset. Deinde filius eius reduceret navem. Qua transvecta frater illius navem ingressus ambo ultra transissent, rursusque unus ex illis ad patrem reduceret navem. Qua reducta filio foris stante pater transiret, rursusque filius, qui ante transierat, ingressus navem eamque ad fratrem reduceret, iamque reductam ingrediantur ambo et transeant. Tali subremigante ingenio erit expleta navigatio forsitan sine naufragio.

Von einem Mann und einer Frau, die das Ladegewicht eines plaustrum wogen

Ein Mann und eine Frau, von denen jeder das Ladegewicht eines *plaustrum* wog, hatten zwei Söhne, die zusammen das Ladegewicht eines *plaustrum* wogen. Sie mussten einen Fluss überqueren. Sie fanden ein Schiff, das nur das Ladegewicht eines *plaustrum* tragen konnte. Es soll der die Überfahrt durchführen, der glaubt es zu können, ohne dass das Schiff untergeht.

Lösung

In derselben Ordnung wie vorher würden zuerst die zwei Kinder das Boot besteigen und hinüberfahren, und einer von ihnen würde das Schiff zurückbringen. Dann würde die Mutter das Schiff besteigen und hinüberfahren. Ihr Sohn würde sodann das Schiff zurückfahren. Wenn das Schiff zurückgebracht ist, würde sein Bruder das Schiff besteigen; beide würden übersetzen, und wieder würde einer von ihnen das Schiff zum Vater zurückbringen. Nachdem es zurückgebracht ist, würde der Sohn aussteigen und der Vater würde übersetzen; und der Sohn, der zuvor hinübergefahren war, würde das Schiff wieder besteigen und zum Bruder zurückbringen. Dann würden es beide besteigen und übersetzen. Wenn das Übersetzen von einer solchen Überlegung beim Rudern bestimmt ist, wird es wahrscheinlich ohne Schiffbruch stattfinden.

„Drei Ehepaare wollen über den Fluss" *Columbia-Algorismus* (Italienischer Codex 14.Jh.), Nr. 124. New York, Columbia University.

(20) PROPOSITIO DE ERICIIS

De ericiis masculo et femina habentibus duos natos libram ponderantibus flumen transire volentibus.

Von den Igeln

Ein männlicher und ein weiblicher Igel hatten zwei Junge, wogen jeweils eine *libra* und wollten einen Fluss überqueren.

SOLUTIO

Similiter, ut superius, transissent prius duo infantes, et unus ex illis navem reduceret. In quam pater ingressus ultra transisset, et ille infans unus, qui prius cum fratre transierat, navem ad ripam reduceret. In quam frater illius rursus ingressus ambo ultra venissent, unusque ex illis foras egressus, et alter ad matrem reduceret navem, in quam mater ingressa ultra venisset. Qua egrediente foras filius eius, qui ante cum fratre transierat, navem rursus ingressus eam ad fratrem ultra reduceret. In quam ambo ingressi ultra venissent, et fieret expleta transvectio nullo formidante naufragio.

Lösung

In gleicher Weise wie vorhin würden zuerst die zwei Jungen übersetzen und eines von ihnen würde das Schiff zurückbringen. In dieses würde der Vater einsteigen und hinüberfahren, und jenes Junge, das zuvor mit seinem Bruder übergesetzt hatte, würde das Schiff ans andere Ufer zurückbringen. Dann würde sein Bruder zusteigen und beide würden übersetzen, einer von ihnen würde aussteigen und der andere würde das Schiff zu seiner Mutter zurückbringen, in das die Mutter ihrerseits einsteigt und hinüberfährt. Nachdem sie ausgestiegen ist, würde ihr Sohn, der zuvor mit seinem Bruder übergesetzt hatte, das Schiff besteigen und es wieder zu seinem Bruder zurückbringen. Beide würden es nun besteigen und übersetzen und es wäre ein vollständiges Übersetzen, ohne dass ein Schiffbruch zu befürchten wäre.

(21) PROPOSITIO DE CAMPO ET OVIBUS IN EO LOCANDIS

Est campus, qui habet in longitudine pedes CC et in latitudine pedes C. Volo ibidem mittere oves, sic tamen, ut unaquaeque ovis habeat in longitudine pedes V et in latitudine pedes IV. Dicat, rogo, qui valet, quod oves ibidem locari possunt.

Von einem Feld und Schafen, die auf ihm auszusetzen sind

Gegeben ist ein Feld, das in der Länge 200 Fuß und in der Breite 100 Fuß misst. Ich will dort Schafe auslassen, doch so, dass jedes Schaf einen 5 Fuß langen und 4 Fuß breiten Weideplatz hat. Es soll, bitte, der sprechen, der weiß, wieviele Schafe dort ausgesetzt werden können.

SOLUTIO

Ipse campus habet in longitudine pedes CC et in latitudine pedes C. Duc bis quinquenos de CC, fiunt XL, ac deinde C divide per IIII. Quarta pars centenarii XXV sunt. Sive ergo XL vicies quinquies, sive XXV quadragies ducti, millenarium implent numerum. Tot ergo oves ibidem collocari possunt.

Lösung

Das Feld selbst misst in der Länge 200 und in der Breite 100 Fuß. Rechne ferner den fünften Teil von 200, so ergibt sich 40; teile hierauf 100 durch 4, so ist der vierte Teil von hundert 25. Wenn du nun 25 mal 40, oder 40 mal 25 rechnest, das Ergebnis ist 1000. Ebensoviele Schafe können daher dort ausgesetzt werden.

(22) PROPOSITIO DE CAMPO FASTIGIOSO

Est campus fastigiosus, qui habet in uno latere perticas C et in alio latere perticas C et in fronte perticas L et in medio perticas LX et in altera fronte perticas L. Dicat, qui potest, quot aripennos claudere debet.

Von einem spitz auslaufenden Feld

Gegeben ist ein spitz auslaufendes Feld, das auf einer Breitseite 100 *perticae*, auf der anderen Breitseite 100 *perticae*, auf der Stirnseite 50 *perticae*, auf der dazwischenliegenden Seite 60 *perticae* und auf der zweiten Stirnseite 50 *perticae* misst. Es soll sagen, wer kann, wieviele *aripenni* es einschließen muss.

SOLUTIO

Longitudo huius campi C perticis et utriusque frontis latitudo L, medietas vero LX includitur. Iunge utriusque frontis numerum cum medietate, et fiunt CLX. Ex ipsis assume tertiam partem, id est LIII, et multiplica centies, fiunt V CCC. Divide in XII aequas partes, et inveniuntur CCCCXLI. Item eosdem divide in XII partes, et reperiuntur XXXVII. Tot sunt in hoc campo aripenni numero.

Lösung

Die Länge dieses Feldes misst jeweils 100 *perticae*, die Breite auf beiden Seiten 50, die dazwischenliegende Seite aber 60 *perticae*. Addiere die Maßzahl beider Breitseiten mit der Maßzahl der dazwischenliegenden Seite, und es ergibt sich 160. Davon nimm den dritten Teil, das heißt 53, und multipliziere ihn mit 100, macht 5300. Teile daraufhin in 12 gleiche Teile, und es ergibt sich 441. Teile ebenso dieses Ergebnis in 12 Teile, und es ergibt sich 37. Ebensoviele *aripenni* sind in dieser Fläche enthalten.

(23) PROPOSITIO DE CAMPO QUADRANGULO

Est campus quadrangulus, qui habet in uno latere perticas XXX et in alio perticas XXXII et in fronte perticas XXXIIII et in altera fronte perticas XXXII. Dicat, qui potest, quot aripenni in eo concludi debent.

Von einem viereckigen Feld

Gegeben ist ein viereckiges Feld, welches auf einer Breitseite 30 *perticae,* auf der anderen 32 *perticae*, an der Vorderseite 34 *perticae* und an der Rückseite 32 *perticae* misst. Sage, wer kann, wieviele *aripenni* in ihm enthalten sein müssen.

SOLUTIO

Duae eiusdem campi longitudines faciunt LXII. Duc dimidiam de LXII, fiunt XXXI. Atque duae eiusdem campi latitudines iunctae fiunt LXVI. Duc vero mediam de LXVI, fiunt XXXIII. Duc namque tricies semel XXXIII, fiunt I XX. Divide per duodecimam partem bis sicut superius, hoc est de mille viginti duc duodecimam, fiunt LXXXV, rursusque LXXXV divide per XII, fiunt VII. Sunt ergo in hoc aripenni numero septem.

Lösung

Die beiden Längsseiten dieses Feldes ergeben zusammen 62 *perticae.* Rechne die Hälfte von 62, macht 31. Die zwei Breitseiten desselben Feldes ergeben miteinander addiert 66. Rechne nun die Hälfte von 66, macht 33. Rechne nun 31 mal 33, macht 1020. Teile nun zweimal durch 12 wie vorhin, das heißt, berechne den zwölften Teil von 1020, macht 85, teile 85 wieder durch 12, macht 7. Daher sind in dieser Fläche 7 *aripenni* enthalten.

(24) PROPOSITIO DE CAMPO TRIANGULO

Est campus triangulus, qui habet in uno latere perticas XXX et in alio perticas XXX et in fronte perticas XVIII. Dicat, qui potest, quot aripennos concludere debet.

Von einem dreieckigen Feld

Gegeben ist ein dreieckiges Feld, das auf einer Breitseite 30 *perticae*, auf der anderen Breitseite 30 *perticae* und auf der Stirnseite 18 *perticae* misst. Es sage, wer kann, wieviele *aripenni* es einschließen muss.

SOLUTIO

Iunge duas latitudines istius campi, et fiunt LX. Duc mediam de LX, fiunt XXX, et quia in fronte perticas XVIII habet, duc mediam de XVIII, fiunt VIIII. Duc vero novies triginta, fiunt CCLXX. Fac exinde bis XII, id est, divide CCLXX per duodecimam, fiunt XXII et semis. Atque iterum XXII et semis per duodecimam divide partem: fit aripennus unus et perticae X ac dimidia.

Lösung

Verbinde die zwei Breitseiten dieses Feldes, macht 60. Berechne die Hälfte von 60, macht 30, und da das Feld an der Stirnseite 18 *perticae* misst, berechne die Hälfte von 18, macht 9. Rechne aber 9 mal 30, macht 270. Berechne nun davon zweimal den zwölften Teil, das heißt, teile 270 durch 12, macht 22 ½. Teile wiederum 22 ½ durch 12, macht 1 *aripennus* und 10 ½ *perticae*

(25) PROPOSITIO DE CAMPO ROTUNDO

Est campus rotundus, qui habet in gyro perticas CCCC. Dic, quot aripennos capere debet.

Von einem runden Feld

Gegeben ist ein rundes Feld, das im Kreis 400 *perticae* misst. Sag, wieviele *aripenni* es enthalten muss.

SOLUTIO

Quarta quidem pars huius campi, qui CCCC includitur perticis, in C consistit. Hos si per semetipsos multiplicaveris, id est, si centies duxeris, fiunt X. Hos in XII partes dividere debes. Etenim de decem milibus duodecima est DCCCXXXIII, quam cum item in XII partitus fueris, invenies LXVIIII. Tot enim aripennos huiusmodi campus includit.

Lösung

Der vierte Teil des Umfanges dieses Feldes, der 400 *perticae* misst, ist 100. Wenn du diese Zahl mit sich selbst multiplizierst, das heißt, wenn du 100 mal 100 rechnest, so ist das Ergebnis 10000. Diese Zahl musst du in 12 Teile teilen. Von 10000 beträgt der zwölfte Teil 833; und wenn du dieses Ergebnis wieder durch 12 teilst, wirst du 69 als Ergebnis erhalten. Ebensoviele *aripenni* enthält ein derartiges Feld.

(26) PROPOSITIO DE CAMPO ET CURSU CANIS AC FUGA LEPORIS

Est campus, qui habet in longitudine pedes CL. In uno capite stabat canis, et in alio stabat lepus. Promovit namque canis ille post ipsum, scilicet leporem, currere. Ast ubi ille canis faciebat in uno saltu pedes VIIII, lepus transmittebat VII. Dicat, qui velit, quot pedes quotve saltus canis persequendo vel lepus fugiendo, quoadusque comprehensus est, confecerint.

Von einem Feld, einem laufenden Hund und einem fliehenden Hasen

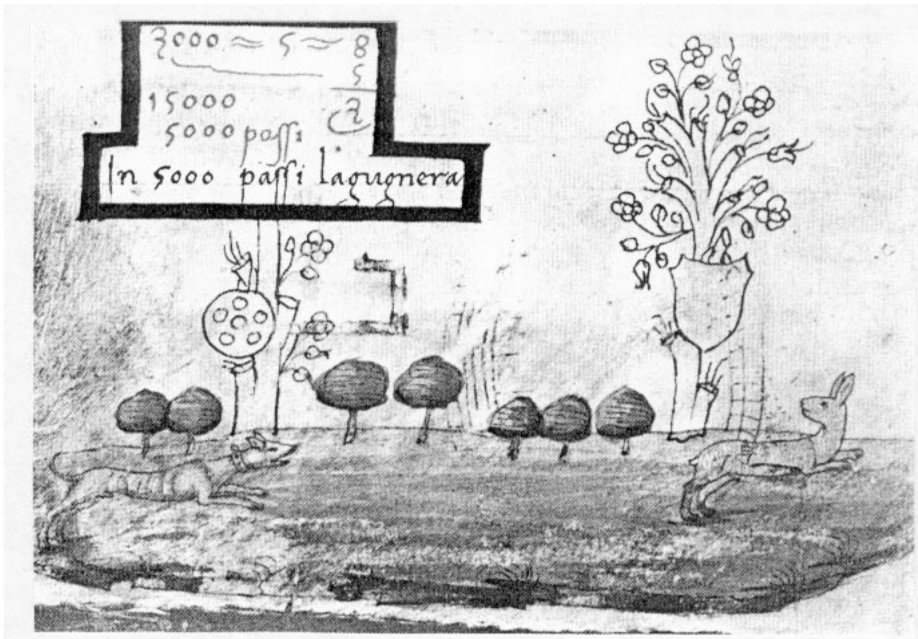
Gegeben ist ein Feld, das in der Länge 150 Fuß misst. Auf der einen Seite stand ein Hund und auf der anderen ein Hase. Jener Hund ließ den Hasen vor sich herlaufen. Aber während der Hund bei einem Sprung 9 Fuß schaffte, legte der Hase nur 7 Fuß zurück. Es sage, wer will, wieviele Fuß oder wieviele Sprünge entweder der Hund bei seiner Verfolgung oder der Hase bei seiner Flucht zurücklegten, bis der Hase gefasst wurde

SOLUTIO

Longitudo huius videlicet campi habet pedes CL. Duc mediam de CL, fiunt LXXV. Canis vero faciebat in uno saltu pedes VIIII. Quippe LXXV novies ducti fiunt DCLXXV, tot pedes leporem persequendo canis cucurrit, quoadusque eum comprehendit dente tenaci. At vero, quia lepus VII pedes in uno saltu faciebat, duc ipsos LXXV septies: fiunt DXXV. Tot pedes lepus fugiendo peregit, donec consecutus fuit.

Lösung

Die Länge dieses Feldes misst 150 Fuß. Berechne die Hälfte von 150, macht 75. Der Hund aber legte bei einem Sprung 9 Fuß zurück. Da 75 mal 9 gerechnet 675 ergibt, lief der Hund bei der Verfolgung des Hasen ebensoviele Fuß, bis er ihn mit spitzem Zahn erfasste. Weil aber der Hase 7 Fuß mit einem Sprung zurücklegte, rechne 7 mal 75, macht 525. Ebensoviele Fuß legte der Hase bei seiner Flucht zurück, bis er eingeholt wurde.



„Hase und Hund“ aus dem *Trattato di aritmetica* v. Filippo Calandri, Florenz 1491, Blatt 92v.

(27) PROPOSITIO DE CIVITATE QUADRANGULA

Est civitas quadrangula, quae habet in uno latere pedes mille centum, et in alio latere pedes mille, et in fronte pedes DC, et in altera pedes DC. Volo ibidem tecta domorum ponere sic, ut habeat unaquaeque casa in longitudine pedes XL et in latitudine pedes XXX. Dicat, qui valet, quot casas capere debet.

Von einer viereckigen Stadt

Gegeben ist eine viereckige Stadt, die auf einer Breitseite 1100 Fuß misst, auf der zweiten Breitseite 1000 Fuß, auf der Vorderseite 600 Fuß und auf der Rückseite 600 Fuß. Ich will dort Häuser bauen, so dass jedes Haus in der Länge 40 Fuß und in der Breite 30 Fuß misst. Es sage, wer kann, wieviele Häuser die Stadt fassen kann.

SOLUTIO

Si fuerint duae huius civitatis longitudines iunctae, faciunt II C. Similiter duae, si fuerint latitudines iunctae, fiunt I CC. Ergo duc mediam de I CC, fiunt DC, rursusque duc mediam de II C, fiunt I L. Et quia unaquaeque domus habet in longo pedes XL et in lato pedes XXX, deduc quadragesimam partem de mille L, fiunt XXVI. Atque iterum assume tricesimam de DC, fiunt XX. Vicies ergo XXVI ducti fiunt DXX. Tot domus capiendae sunt.

Lösung

Wenn die zwei Längen dieser Stadt addiert werden, so ist das Ergebnis 2100. Wenn in gleicher Weise die zwei Breiten addiert werden, so ergibt sich 1200. Berechne nun die Hälfte von 1200, macht 600, berechne ferner die Hälfte von 2100, macht 1050. Und weil jedes Haus in der Länge 40 Fuß und in der Breite 30 Fuß misst, berechne den vierzigsten Teil von 1050, macht 26. Und dann nimm wiederum den dreißigsten Teil von 600, macht 20. 20 mal 26 gerechnet ergibt 520. Ebensoviele Häuser kann die Stadt fassen.

(28) PROPOSITIO DE CIVITATE TRIANGULA

Est civitas triangula, quae habet in uno latere pedes C, et in alio latere pedes C, et in fronte pedes XC. Volo enim ibidem aedificia domorum construere, sic tamen, ut unaquaeque domus habeat in longitudine pedes XX et in latitudine pedes X. Dicat, qui potest, quot domus capi debent.

SOLUTIO

Duo igitur huius civitatis latera iuncta fiunt CC, atque duc mediam de CC, fiunt C. Sed quia in fronte habet pedes XC, duc mediam de XC, fiunt XLV. Et quia longitudo uniuscuiusque domus habet pedes XX et latitudo ipsarum habet pedes X, itaque in C quinquies XX et in XL quater X sunt. Duc igitur quinquies IIII, fiunt XX. Tot domos huiusmodi captura est civitas.

Von einer dreieckigen Stadt

Gegeben ist eine dreieckige Stadt, die auf einer Breitseite 100 Fuß, auf der anderen Breitseite 100 Fuß und auf der Vorderseite 90 Fuß misst. Ich will dort Häuser errichten, doch so, dass jedes Haus in der Länge 20 Fuß und in der Breite 10 Fuß misst. Sag, wer kann, wieviele Häuser gerechnet werden müssen.

Lösung

Die zwei Breitseiten dieser Stadt addiert, ergeben 200. Berechne die Hälfte von 200, macht 100. Aber weil die Stadt an der Stirnseite 90 Fuß misst, berechne die Hälfte von 90, macht 45. Und weil die Länge jedes Hauses 20 Fuß, die Breite desselben 10 Fuß beträgt, deshalb sind in 100 fünfmal 20 und in 40 viermal 10 enthalten. Rechne nun 5 mal 4, macht 20. Ebensoviele Häuser kann eine derart aussehende Stadt fassen.

(29) PROPOSITIO DE CIVITATE ROTUNDA

Est civitas rotunda, quae habet in circuitu pedum VIII. Dicat, qui potest, quot domos capere debet, ita ut unaquaeque domus habeat in longitudine pedes XXX et in latitudine pedes XX.

SOLUTIO

In huius civitatis ambitu $\overline{\text{VIII}}$ pedes numerantur, qui sesqualtera proportione dividuntur in IIII DCCC et in III CC. In illis autem longitudo domorum, in istis latitudo versatur. Subtrahe itaque de utraque summa medietatem, et remanent de maiore II CCCC, de minore vero I DC. Hos igitur I DC divide in vicenos et invenies octoagies viginti, rursumque maior summa, id est II CCCC, in XXX partiti octoagies triginta dinumerantur. Duc octoagies LXXX, et fiunt VI CCCC. Tot in huiusmodi civitate domus secundum propositionem supra scriptam construi possunt.

Von einer runden Stadt

Gegeben ist eine runde Stadt, die im Umkreis 8000 Fuß misst. Es sage, wer kann, wieviele Häuser sie aufnehmen kann, so dass jedes Haus in der Länge 30 Fuß und in der Breite 20 Fuß misst.

Lösung

Der Umfang dieser Stadt misst 8000 Fuß, der im Verhältnis 3 zu 2 in 4800 und 3200 Fuß geteilt wird. In jenen 4800 sind aber die Längen der Häuser, in diesen 3200 die Breiten derselben enthalten. Subtrahiere nun von beiden Zahlen ihre jeweiligen Hälften, so bleiben von der größeren 2400, von der kleineren 1600 übrig. Teile diese 1600 in zwanzig Teile, und du wirst als Ergebnis 80 mal 20 erhalten; wird ferner die größere Zahl, nämlich 2400 durch 30 geteilt, so ist das Ergebnis 80 mal 30. Rechne nun 80 mal 80, macht 6400. Ebensoviele Häuser können gemäß obiger Proportion in einer derartigen Stadt errichtet werden.

(30) PROPOSITIO DE BASILICA

Est basilica, quae habet in longitudine pedes CCXL et in latitudine pedes CXX. Laterculi vero stratae eiusdem unus laterculus habet in longitudine uncias XXIII, hoc est, pedem unum et XI uncias, et in latitudine uncias XII, hoc est pedem I. Dicat, qui velit, quot laterculi eam debent implere.

SOLUTIO

CCXL pedes longitudinis implent CXXVI laterculi et CXX pedes latitudinis CXX laterculi, quia unusquisque laterculus in latitudine pedis mensuram habet. Multiplica itaque centum vicies CXXVI, in XV CXX summa concrescit. Tot igitur in huiusmodi basilica laterculi pavimentum contegere possunt.

Von einer Kirche

Gegeben ist eine Kirche, die in der Länge 240 Fuß und in der Breite 120 Fuß misst. Alle Bodenziegel haben dieselbe Größe; ein Ziegel misst in der Länge 23 *unciae*, das ist ein Fuß und 11 *unciae*, und in der Breite 12 *unciae*, das ist ein Fuß. Es sage, wer will, wieviele Ziegel den Boden der Kirche bedecken müssen.

Lösung

Die 240 Fuß der Länge füllen 126 Ziegel aus, die 120 Fuß der Breite 120 Ziegel, weil jeder Ziegel in der Breite 1 Fuß misst. Multipliziere nun 120 mit 126, so wächst das Ergebnis auf 15120 an. Ebensoviele Ziegel können daher den Fußboden einer derartigen Kirche bedecken.

(31) PROPOSITIO DE CANAVA

Est canava, quae habet in longitudine pedes C et in latitudine pedes LXIIII. Dicat, qui potest, quot cupas capere debet, ita tamen, ut unaquaeque cupa habeat in longitudine pedes VII et in lato, hoc est in medio, pedes IIII, et pervius unus habeat pedes IIII.

SOLUTIO

In centum autem quaterdecies VII numerantur, in LXIIII vero sedecies quaterni continentur, ex quibus IIII ad pervium deputantur, quod in longitudinem ipsius canavae ducitur. Quia ergo in LX quindecies quaterni sunt et in centum quaterdecies septeni, duc quindecies XIIII, fiunt CCX. Tot cupae iuxta suprascriptam magnitudinem in huiusmodi canava contineri possunt.

Von einem Keller

Gegeben ist ein Keller, der in der Länge 100 Fuß und in der Breite 64 Fuß misst. Es sage, wer kann, wieviele Fässer er fassen kann, doch so, dass jedes Fass in der Länge 7 Fuß und in der Breite, das heißt in der Mitte, 4 Fuß misst und ein Zugang von 4 Fuß frei bleibt.

Lösung

In 100 wird 7 vierzehnmal gezählt, in 64 aber ist 4 sechzehnmal enthalten; von diesen 64 werden 4 für den Durchgang abgezogen, der parallel zur Längsseite dieses Kellers liegt. Da nun 4 in 60 fünfzehnmal, 7 in 100 vierzehnmal enthalten ist, rechne 15 mal 14, macht 210. Soviele Fässer von vorhin gegebener Größe können in einem derartigen Keller gelagert werden.

(32) PROPOSITIO DE QUODAM PATREFAMILIAS DISTRIBUENTE ANNONAM

Quidam paterfamilias habuit familias XX, et iussit eis dare de annona modios XX: sic iussit, ut viri acciperent modios ternos et mulieres binos et infantes singula semodia. Dicat, qui potest, quot viri aut quot mulieres vel quot infantes esse debent.

SOLUTIO

Duc semel ternos, fiunt III, hoc est unus vir III modios accepit. Similiter et quinquies bini, fiunt X, hoc est, quinque mulieres acceperunt modios X. Duc vero septies binos, fiunt XIIII, hoc est, XIIII infantes acceperunt modios VII. Iunge ergo I et V et XIIII, fiunt XX. Hae sunt familiae XX. Ac deinde iunge III et VII et X, fiunt XX, haec sunt modia XX. Sunt ergo simul familiae XX et modia XX.

Von einem Familienvater, der Getreide verteilt

Ein Familienvater hatte 20 Familienangehörige und befahl, ihnen 20 Scheffel Getreide zu geben. Er gab jedoch den Befehl, dass die Männer jeweils drei Scheffel, die Frauen je zwei und die Kinder je einen halben Scheffel erhalten sollten. Es sage, wer kann, wieviele Männer, wieviele Frauen und wieviele Kinder es sein müssen.

Lösung

Rechne 1 mal 3, macht 3, das heißt, ein Mann bekam drei Scheffel. Rechne gleichfalls 5 mal 2, macht 10, das heißt, 5 Frauen erhielten 10 Scheffel. Rechne nun 7 mal 2, macht 14, das heißt, 14 Kinder bekamen 7 Scheffel. Addiere nun 1, 5 und 14, macht 20, das sind 20 Familienangehörige. Addiere ferner 3, 7 und 10, macht 20, nämlich 20 Scheffel. Es sind daher 20 Familienangehörige und 20 Scheffel.

(33) ALIA PROPOSITIO

Quidam paterfamilias habuit familias XXX, quibus iussit dare de annona modios XXX. Sic vero iussit, ut viri acciperent modios ternos et mulieres binos et infantes singula semodia. Solvat, qui potest, quot viri aut quot mulieres quotve infantes fuerunt.

SOLUTIO

Si duxeris ternos ter, fiunt VIIII. Et si duxeris quinquies binos, fiunt X. Ac deinde duc vicies bis semis, fiunt XI: hoc est, tres viri acceperunt modios VIIII, et quinque mulieres acceperunt X, et XXII infantes acceperunt XI modios. Qui simul iuncti III et V et XXII faciunt familias XXX. Rursusque VIIII et XI et X simul iuncti faciunt modios XXX. Quod sunt ergo familiae XXX et modii XXX.

Ein anderes Beispiel

Ein Familienvater hatte 30 Familienangehörige und befahl, ihnen 30 Scheffel Getreide zu geben. Er befahl, dass die Männer jeweils drei Scheffel, die Frauen je zwei und die Kinder je einen halben Scheffel erhalten sollten. Es sage, wer kann, wieviele Männer, wieviele Frauen und wieviele Kinder es waren.

Lösung

Wenn du 3 mal 3 rechnest, so ergibt sich 9. Wenn du 5 mal 2 rechnest, so ergibt sich 10. Und dann rechne 22 mal ½, macht 11: Das heißt, 3 Männer erhielten 9 Scheffel, 5 Frauen 10 und 22 Kinder 11 Scheffel Getreide. Diese 3, 5 und 22 addiert, ergeben 30 Familienangehörige. Und 9, 11 und 10 miteinander addiert, ergeben 30 Scheffel. Das sind gleichzeitig 30 Familienangehörige und 30 Scheffel.

(33a) ITEM ALIA PROPOSITIO

Quidam paterfamilias habuit familias XC, et iussit eis dare de annona modios XC. Sic quoque iussit, ut viri acciperent modios ternos et mulieres binos et infantes singula semodia. Dicat, qui se arbitratur scire, quot viri aut quot mulieres quotve fuere infantes.

Ein anderes Beispiel

Ein Familienvater hatte 90 Familienangehörige und befahl, ihnen 90 Scheffel Getreide zu geben. Auch er gab den Befehl, dass die Männer jeweils 3 Scheffel, die Frauen je zwei und die Kinder je einen halben Scheffel erhalten sollten. Es sage, wer es zu wissen glaubt, wieviele Männer, wieviele Frauen und wieviele Kinder es waren.

SOLUTIO

Duc sexies ter, fiunt XVIII, et duc vicies binos, fiunt XL. Duc vero sexagies quaternos semis, fiunt XXXII. Id est, sex viri acceperunt modios XVIII, et XX mulieres acceperunt modios XL, et LXIIII infantes acceperunt modios XXXII. Qui simul iuncti, hoc est VI et XX et LXIIII, familias XC efficiunt. Iterumque iunge XVIII et XL et XXXII, fiunt XC, qui faciunt modios XC. Qui simul iuncti faciunt familias XC et modios XC.

Lösung

Rechne 6 mal 3, macht 18, und rechne 20 mal 2, macht 40. Rechne nun 64 mal ½, macht 32, das heißt, 6 Männer erhielten 18 Scheffel, 20 Frauen 40 Scheffel und 64 Kinder 32 Scheffel. Diese, das heißt 6, 20 und 64, addiert ergeben 90 Familienangehörige. Addiere ferner 18, 40 und 32, macht 90, das bedeutet 90 Scheffel. Diese addiert ergeben zugleich 90 Familienangehörige und 90 Scheffel Getreide.

(34) ITEM ALIA PROPOSITIO

Quidam paterfamilias habuit familias C, quibus praecepit dari de annona modios C, eo vero tenore, ut viri acciperent modios ternos, mulieres binos, et infantes singula semodia. Dicat ergo, qui valet, quot viri, quot mulieres aut quot infantes fuerunt.

Ein anderes Beispiel

Ein Familienvater hatte 100 Familienangehörige und er befahl, ihnen 100 Scheffel Getreide zu geben, aber unter der Bedingung, dass die Männer je drei, die Frauen je zwei und die Kinder je einen halben Scheffel erhalten sollten. Es sage, wer kann, wieviele Männer, wieviele Frauen oder wieviele Kinder es waren.

SOLUTIO

Undecies terni fiunt XXXIII, et XV bis ducti fiunt XXX. Duc vero septuagies quater semis, fiunt XXXVII: id est, XI viri acceperunt XXXIII modios, et XV mulieres acceperunt XXX, et LXXIIII infantes acceperunt XXXVII. Qui simul iuncti, id est XI et XV et LXXIIII, fiunt C, quae sunt familiae C. Similiter iunge XXXIII et XXX et XXXVII, faciunt C, qui sunt modii C. His ergo simul iunctis habes familias C et modios C.

Lösung

11 mal 3 macht 33, 15 mal 2 macht 30. Rechne nun 74 mal ½, so ergibt sich 37: Das heißt, 11 Männer erhielten 33 Scheffel, 15 Frauen 30 Scheffel und 74 Kinder 37 Scheffel Getreide. Diese, das heißt 11, 15 und 74, addiert ergeben 100, das sind 100 Familienangehörige. Addiere auf gleiche Weise 33, 30 und 37, macht 100, das sind 100 Scheffel Getreide. Nach der Addition dieser Zahlen hast du 100 Familienangehörige und 100 Scheffel Getreide als Ergebnis.

(35) PROPOSITIO DE OBITU CUIUSDAM PATRISFAMILIAS

Quidam paterfamilias moriens reliquit infantes et in facultate sua solidos DCCCCLX et uxorem praegnantem. Qui iussit, ut, si ei masculus nasceretur, acciperet de omni massa dodrantem, hoc est, uncias VIIII, et mater ipsius acciperet quadrantem, hoc est, uncias III. Si autem filia nasceretur, acciperet septuncem, hoc est, VII uncias, et mater ipsius acciperet quincuncem, hoc est, V uncias. Contigit autem, ut geminos parturiret, id est puerum et puellam. Solvat, qui potest, quantum accepit mater vel quantum filius quantumve filia.

Vom Tod eines Familienvaters

Ein Familienvater starb und ließ sein Vermögen in Höhe von 960 *solidi* und seine schwangere Gattin zurück. Und er befahl, dass, wenn ihm ein Sohn geboren werde, dieser ¾, das sind neun Zwölftel des gesamten Vermögens und seine Mutter ¼, das sind drei Zwölftel erhalten sollte. Sollte ihm aber eine Tochter geboren werden, so sollte sie sieben Zwölftel und ihre Mutter fünf Zwölftel erhalten. Es trat aber der Fall ein, dass sie Zwillinge gebar, das heißt einen Buben und ein Mädchen. Es löse nun, wer kann, wieviel die Mutter, wieviel der Sohn und wieviel die Tochter erhielt.

SOLUTIO

Iunge ergo VIIII et III, fiunt XII. XII namque unciae libram faciunt. Prorsusque iunge similiter VII et V, faciunt iterum XII. Ideoque bis XII faciunt XXIIII. XXIIII autem unciae faciunt duas libras, id est, solidos XL. Divide ergo per vicesimam quartam partem DCCCCLX solidos: vicesima quarta pars eorum fiunt XL. Deinde duc, quia facit dodrans, XL in nonam partem. Ideo novies XL accepit filius, hoc est, XVIII libras, quae faciunt solidos CCCLX. Et quia mater tertiam partem contra filium accepit et quintam contra filiam, III et V fiunt VIII. Itaque duc, quia legitur, quod faciat bisse, XL in parte octava. Octies ergo XL accepit mater, hoc est, libras XVI, quae faciunt solidos CCCXX. Deinde duc, quia legitur, quod faciat septunx, XL in VII partibus. Postea duc septies XL, fiunt XIIII librae, quae faciunt solidos CCLXXX. Hoc filia accepit. Iunge ergo CCCLX et CCCXX et CCLXXX, fiunt DCCCCLX solidi et XLVIII librae.

Lösung

Addiere 9 und 3, macht 12. 12 Zwölftel bilden nämlich ein Ganzes. Addiere auf gleiche Weise 7 und 5, macht ebenfalls 12. Zweimal 12 ergibt 24. 24 Zwölftel aber ergeben 2 Ganze, das heißt 40 Zwanzigstel. Teile nun 960 *solidi* durch 24: Der 24. Teil davon ist 40. Berechne nun, weil es 9 Zwölftel ausmacht, das Neunfache von 40. Der Sohn erhielt daher neunmal 40 *solidi*, das sind 18 *librae*, die 360 *solidi* entsprechen. Und weil die Mutter 3 Zwölftel im Vergleich zu ihrem Sohn und 5 Zwölftel im Vergleich zu ihrer Tochter erhielt, 3 und 5 macht 8. Berechne daher, weil man liest, dass es 8 Zwölftel ausmacht, das Achtfache von 40. Daher erhielt die Mutter achtmal 40 *solidi*, das sind 16 *librae*, die 320 *solidi* entsprechen. Berechne ferner, weil man liest, dass es 7 Zwölftel ausmacht, das Siebenfache von 40. Rechne nun siebenmal 40 *solidi*, macht 14 *librae*, die 280 *solidi* entsprechen. Das erhielt die Tochter. Addiere nun 360, 320 und 280, macht 960 *solidi* oder 48 *librae*.

„Zwillingserbschaft" aus dem *Trattato d'aritmetica* (Nr. 100) von Paolo Dogomari. Codex Magliabechiano XI, 86. Pisa 1964.

(36) PROPOSITIO DE SALUTATIONE CUIUSDAM SENIS AD PUERUM

Quidam senior salutavit puerum, cui et dixit: Vivas, fili, vivas, inquit, quantum vixisti, et aliud tantum, et ter tantum, addatque tibi deus unum de annis meis, et

Vom Gruß eines alten Mannes an einen Knaben

Ein älterer Mann grüßte einen Knaben, zu dem er sagte: „Du sollst so lange leben, mein Sohn, wie du gelebt hast, und noch einmal so lang und noch dreimal so lang, und Gott soll dir eines von meinen Lebensjahren geben und du impleas annos centum. Solvat, qui potest, quot annorum tunc ipse puer erat.

würdest 100 Jahre vollenden. Es löse, wer kann, wie alt zu dieser Zeit der Knabe war.

SOLUTIO

In eo vero, quod dixit: vivas, quantum vixisti, vixerat ante annos VIII et menses tres. Et aliud tantum fiunt anni XVI et menses VI, et alterum tantum fiunt anni XXXIII, qui ter multiplicati fiunt anni XCVIIII. Uno cum ipsis addito fiunt C.

Lösung

Zu dem Zeitpunkt, als er sagte: „Du sollst leben, solange du gelebt hast," hatte der Bub schon 8 Jahre und 3 Monate gelebt. Ein zweites Mal soviel macht 16 Jahre und 6 Monate und ein drittes Mal soviel macht 33 Jahre, die mit 3 multipliziert 99 Jahre ergeben. Wenn diesen 1 hinzugefügt wird, ergibt das 100.

(37) PROPOSITIO DE QUODAM HOMINE VOLENTI AEDIFICARE DOMUM

Von einem, der ein Haus bauen wollte

Homo quidam volens aedificare domum locavit artifices VI, ex quibus V magistri et unus discipulus erat. Et convenit inter eum, qui aedificare volebat, et artifices, ut per singulos dies XXV denarii eis in mercede darentur, sic tamen, ut discipulus medietatem de eo, quod unus ex magistris accipiebat, acciperet. Dicat, qui potest, quantum unusquisque de illis per unumquemque diem accepit.

Ein Mann wollte ein Haus bauen und verpflichtete 6 Handwerker, von denen 5 Gesellen und einer Lehrling waren. Und es kam zwischen dem, der bauen wollte und den Handwerkern zu dem Übereinkommen, dass ihnen täglich 25 Denare als Lohn gezahlt werden, doch so, dass der Lehrling die Hälfte von dem bekommen sollte, was einer von den Gesellen bekam. Es sage, wer kann, wieviel ein jeder von ihnen jeden Tag bekam.

SOLUTIO

Tolle primum XXII denarios et divide eos in VI partes. Sic da unicuique de magistris, qui quinque sunt, IIII denarios. Nam quinquies quattuor XX sunt. Duos, qui remanserunt, quae est medietas de IIII, tolle et da discipulo. Et sunt adhuc III denarii residui, quos sic distribues: Fac de unoquoque denario partes XI. Ter undecim fiunt XXXIII. Tolle illas triginta partes, divide eas inter magistros V. Quinquies seni fiunt XXX. Accidunt ergo unicuique magistro partes VI. Tolle tres partes, quae super XXX remanserunt, quod est medietas senarii, ac dabis discipulo.

Lösung

Nimm zuerst 22 Denare und teile sie in 6 Teile. Gib einem jeden der Gesellen, die zu fünft sind, 4 Denare. Denn 5 mal 4 macht 20. Die zwei, die übrig sind, das ist die Hälfte von 4, nimm und gib dem Lehrling. Es sind noch 3 Denare übrig, die du folgendermaßen aufteilen sollst. Bilde von jedem Denar 11 Teile. 3 mal 11 macht 33. Nimm dreißig Teile und teile sie unter den 5 Gesellen auf. 5 mal 6 ergibt 30. Es kommen somit auf jeden Gesellen 6 Teile. Nimm die drei Teile, die über die 30 Teile hinaus übrig bleiben, das ist die Hälfte von 6 Teilen, und gib sie dem Schüler.

(38) PROPOSITIO DE QUODAM EMPTORE IN ANIMALIBUS CENTUM

Über einen, der 100 Tiere kaufte

Voluit quidam homo emere animalia promiscua C de solidis C, ita, ut equus tribus solidis emeretur, bos vero in solido I, et XXIIII oves in solido I. Dicat, qui valet, quot caballi, vel quot boves, quotve fuerunt oves.

Jemand wollte um 100 *solidi* eine gemischte Herde von 100 Tieren kaufen, so dass ein Pferd um 3 *solidi*, ein Rind aber um einen *solidus* und 24 Schafe um einen *solidus* gekauft werden. Es sage, wer kann, wieviele Pferde, Rinder und Schafe es waren.

SOLUTIO

Duc ter vicies tria, fiunt LXVIIII. Et duc bis vicies quattuor, fiunt XLVIII. Sunt ergo caballi XXIII et solidi LXVIIII, et oves XLVIII et solidi II, et boves XXVIIII in solidis XXVIIII. Iunge ergo XXIII et XLVIII et XXVIIII, fiunt animalia C. Ac deinde iunge LXVIIII et II et XXVIIII, fiunt solidi C. Sunt ergo simul iuncta animalia C et solidi C.

Lösung

Rechne 23 mal 3, macht 69. Und rechne 2 mal 24, macht 48. Es sind daher 23 Pferde und 69 *solidi*, sowie 48 Schafe und 2 *solidi* und 29 Rinder zu 29 *solidi*. Addiere nun 23, 48 und 29, macht 100 Tiere. Addiere 69, 2 und 29, macht 100 *solidi*. Es sind daher zusammen 100 Tiere und 100 *solidi*.


Adam Risen.

Vihekauff.

Item/einer hat 100. fl. dafür wil er 100. haupt Vihes kauffen / nemlich / Ochsen/ Schwein/ Kälber/ vnd Geissen/ kost ein Ochs 4 fl. ein Schwein anderthalben fl. ein Kalb einen halben fl. vnd ein Geiß ein ort von einem fl. wie viel sol er jeglicher haben für die 100. fl.?

„Zechenaufgabe“ aus *Adam Risen Rechenbuch auff Linien und Ziphren in allerley Handthierung* von Adam Ries. Frankfurt a.M. 1574. S. 71r.

(39) PROPOSITIO DE QUODAM EMPTORE IN ORIENTE

Quidam homo voluit de C solidis animalia promiscua emere C in oriente. Qui iussit famulo suo, ut camelum V solidis acciperet, asinum solido uno, XX oves in solido uno compararet. Dicat, qui vult, quot cameli vel asini sive oves in negotio C solidorum fuerunt.

SOLUTIO

Si duxeris X novies quinos, fiunt XCV, hoc est, XVIIII cameli sunt empti in solidis XCV per X novies quinos. Adde cum ipsis unum, hoc est, in solido uno asinum unum, fiunt XCVI. Ac deinde duc vicies quater, fiunt LXXX, hoc est, in quattuor solidis oves LXXX. Iunge ergo XVIIII et I et LXXX, fiunt C. Haec sunt animalia C. Ac deinde iunge XCV et I et IIII, fiunt solidi C. Simul ergo iuncti faciunt pecora C et solidos C.

Von einem, der im Orient einkaufte

Ein Mann wollte im Orient um 100 *solidi* eine gemischte Herde von 100 Tieren kaufen. Er befahl seinem Diener, dass er ein Kamel um 5 *solidi*, einen Esel um einen *solidus* und 20 Schafe um einen *solidus* kaufen sollte. Es sage, wer will, wieviele Kamele, Esel und Schafe bei diesem Geldgeschäft mit 100 *solidi* gekauft wurden.

Lösung

Wenn du 19 mal 5 rechnest, ergibt sich 95, das heißt, es wurden 19 Kamele um 19 mal 5 gleich 95 *solidi* gekauft. Füge diesen 95 einen *solidus* hinzu, das heißt, einen Esel um einen *solidus*, macht 96. Rechne ferner 20 mal 4, macht 80, das heißt, um vier *solidi* wurden 80 Schafe gekauft. Addiere nun 19, 1, 80, macht 100. Es sind somit 100 Tiere. Addiere ferner 95, 1, 4, macht 100 *solidi*. In Summe ergeben sich also 100 Tiere und 100 *solidi*.

(40) PROPOSITIO DE HOMINE ET OVIBUS IN MONTE PASCENTIBUS

Quidam homo vidit de monte oves pascentes, et dixit: Utinam haberem tantum et aliud tantum et medietatem de medietate et de hac medietate aliam medietatem, atque ego centesimus una cum ipsis meam ingrederer domum. Solvat, qui potest, quot oves vidit ibidem pascentes.

Von einem Mann und Schafen, die auf einem Berg weideten

Ein Mann sah von einem Berg weidende Schafe und sprach: „Wenn ich soviele Schafe hätte und noch einmal so viele und die Hälfte von der Hälfte und ferner von dieser Hälfte eine weitere Hälfte, dann würde ich als hundertster zusammen mit diesen mein Haus betreten. Es löse, wer kann, wieviele Schafe er dort weiden sah.

SOLUTIO

In hoc ergo, quod dixit: haberem tantum, XXXVI oves primum ab illo visae sunt. Et aliud tantum fiunt LXXII, atque medietas de hac videlicet medietate, hoc est de XXXVI, fiunt XVIII. Rursusque de hac secunda scilicet medietate assumpta medietas, id est XVIII, fiunt VIIII. Iunge ergo XXXVI et XXXVI, fiunt LXXII. Adde cum ipsis XVIII, fiunt XC. Adde vero VIIII cum XC, fiunt XCVIIII. Ipse vero homo cum ipsis additus erit centesimus.

Lösung

Zu dem Zeitpunkt, als er sagte: „Ich möchte soviele haben," wurden 36 Schafe von jenem erblickt. Noch einmal soviel macht 72 und die Hälfte von der Hälfte, das heißt von 36, macht 18. Und die von dieser zweiten Hälfte, das heißt von 18, genommene Hälfte ist 9. Addiere 36 und 36, macht 72. Addiere dazu 18, macht 90. Addiere 9 und 90, macht 99. Der Mann selbst wird diesen hinzugefügt der hundertste sein.

(41) PROPOSITIO DE SODE ET SCROFA

Quidam paterfamilias stabilivit curtem novam quadrangulam, in qua posuit scrofam, quae peperit porcellos VII in media sode, qui una cum matre, quae octava est, pepererunt igitur unusquisque in omni angulo VII. Et ipsa iterum in media sode cum omnibus generatis peperit VII. Dicat, qui vult, una cum matribus quot porci fuerunt.

Von einem Schweinestall und einer Muttersau

Ein Familienvater errichtete einen neuen viereckigen Stall, in den er eine Muttersau stellte, die in der Mitte des Stalles 7 Junge warf. Diese gebaren zusammen mit ihrer jeweiligen Mutter in jeder Ecke jeweils 7 Junge. Die Muttersau selbst gebar dann zum zweitenmal 7 Ferkel in der Mitte des Stalles zusammen mit all ihren Nachkommen. Es sage, wer will, wieviele Schweine inklusive ihrer Mütter es waren.

SOLUTIO

In prima igitur parturitione, quae fuit facta in media sode, fuerunt porcelli VII et mater eorum octava. Octies ergo octo ducti fiunt LXIIII. Tot porcelli una cum matribus suis fuerunt in primo angulo. Ac deinde sexagies quater octo ducti fiunt DXII. Tot cum matribus suis porcelli in angulo fuerunt secundo. Rursumque DXII octies ducti fiunt IIII XCVI. Tot in tertio angulo cum matribus suis fuerunt. Qui si octies multiplicentur, fiunt XXXII DCCLXVIII. Tot cum matribus suis in quarto fuerunt angulo. Multiplica quoque octies XXXII DCCLXVIII, fiunt CCLXII et CXLIIII. Tot enim creverunt, cum in media sode novissime partum fecerunt.

Lösung

Beim ersten Wurf, der in der Mitte des Stalles stattfand, waren es 7 Ferkel und ihre Mutter als achte. 8 mal 8 gerechnet macht 64. Soviele Ferkel zusammen mit ihren Müttern waren es in der ersten Ecke. 64 mal 8 gerechnet macht 512. Soviele Ferkel mit ihren Müttern waren es in der zweiten Ecke. 512 mal 8 ergibt 4096. Soviele waren es mit ihren Müttern in der dritten Ecke. Wenn diese Zahl mit 8 multipliziert wird, ergibt das 32768. So viele waren es mit ihren Mütern in der 4 Ecke. Multipliziere 32768 mit 8, macht 262144. So viele waren es, nachdem sie zuletzt in der Mitte des Stalles geworfen hatten.

(42) PROPOSITIO DE SCALA HABENTE GRADUS CENTUM

Est scala una habens gradus C. In primo gradu sedebat columba una, in secundo duae, in tertio tres, in quarto IIII, in quinto V. Sic in omni gradu usque ad centesimum. Dicat, qui potest, quot columbae in totum fuerunt.

Von einer Leiter mit hundert Stufen

Gegeben ist eine Leiter, die 100 Sprossen hat. Auf der ersten Sprosse saß eine Taube, auf der zweiten zwei, auf der dritten drei, auf der vierten vier, auf der fünften fünf, und weiter so auf jeder Sprosse bis zur hundertsten. Es sage, wer kann, wieviele Tauben es im Ganzen waren.

SOLUTIO

Numerabis autem sic: A primo gradu, in quo una sedet, tolle illam, et iunge ad illas XCVIIII, quae in nonagesimo nono gradu consistunt, et erunt C. Sic secundum ad nonagesimum octavum, et invenies similiter C. Sic per singulos gradus unum de superioribus gradibus et alium de inferioribus hoc ordine coniunge, et reperies semper in binis gradibus C. Quinquagesimus autem gradus solus et absolutus est non habens parem. Similiter et centesimus solus remanebit. Iunge ergo omnes simul, et invenies columbas V L.

Lösung

Du wirst aber so rechnen: Nimm von der ersten Stufe, auf der eine Taube sitzt, jene weg und setze sie zu jenen 99, die auf der 99. Stufe sitzen und es werden 100 sein. Ebenso addiere die zweite zur 98. Stufe, und du wirst ebenfalls 100 Tauben vorfinden. So addiere bei den einzelnen Stufen in dieser Reihenfolge eine von den oberen und eine von den unteren und du wirst immer bei je zwei Stufen 100 Tauben vorfinden. Die 50. Stufe bleibt übrig und hat keine Entsprechung. In gleicher Weise wird auch die 100. Stufe übrig bleiben. Addiere alle zusammen und du wirst 5050 Tauben vorfinden.

(43) PROPOSITIO DE PORCIS

Homo quidam habuit CCC porcos et iussit, ut tot porci numero impari in III dies occidi deberent. Similis est et de XXX sententia. Dicat modo, qui potest, quot porci impares sive de CCC sive de XXX in tres dies occidendi sunt.

SOLUTIO

Ecce fabula, quae a nemine solvi potest, ut CCC porci sive triginta in tribus diebus impari numero occidantur. Haec fabula est tantum ad pueros increpandos.

Von den Schweinen

Ein Mann hatte 300 Schweine und befahl, dass gleich viele Schweine ungerader Zahl an drei Tagen getötet werden. Ähnlich lautet die Rechnung bezüglich 30 Schweinen. Es spreche nur, wer kann, wieviele Schweine ungerader Zahl, seien es im Ganzen 300 oder seien es 30, an drei Tagen getötet werden müssen

Lösung

Siehe, das ist eine Aufgabe, die von niemandem gelöst werden kann, dass nämlich 300 oder 30 Schweine an drei Tagen mit jeweils ungerader Anzahl getötet werden. Diese Aufgabe ist nur dazu da, um die Schüler zu ärgern.

(44) PROPOSITIO DE SALUTATIONE PUERI AD PATREM.

Quidam puer salutavit patrem: Ave, inquit, pater. Cui pater: Valeas, fili. Vivas, quantum vixisti. Quos annos geminatos triplicabis, et sume unum de annis meis, et habebis annos C. Dicat, qui potest, quot annorum tunc tempore puer erat.

SOLUTIO

Erat enim puer annorum XVI et mensium VI. Qui geminati cum mensibus fiunt anni XXXIII. Qui triplicati fiunt XCVIIII. Addito uno patris anno C apparent.

Von einem Buben, der seinen Vater grüßte

Ein Bub grüßte seinen Vater und sagte: „Sei gegrüßt, Vater!“ Ihm antwortete der Vater: „Du sollst gesund bleiben, mein Sohn. Du sollst leben, solange du schon gelebt hast. Und wenn du die doppelte Anzahl dieser Jahre verdreifachst, nimm eines von meinen Jahren und du wirst 100 Jahre leben.“ Es soll sagen, wer kann, wie alt damals der Bub war.

Lösung

Der Bub war 16 Jahre und 6 Monate alt. Diese Jahre zusammen mit den Monaten verdoppelt ergeben 33 Jahre. Diese verdreifacht macht 99 Jahre. Ein Jahr des Vaters hinzugefügt ergibt 100.

(45) PROPOSITIO DE COLUMBA

Columba sedens in arbore vidit alias volantes et dixit eis: Utinam fuissetis aliae tantum et tertiae tantum. Tunc una mecum fuissetis C. Dicat, qui potest, quot columbae erant in primis volantes.

SOLUTIO

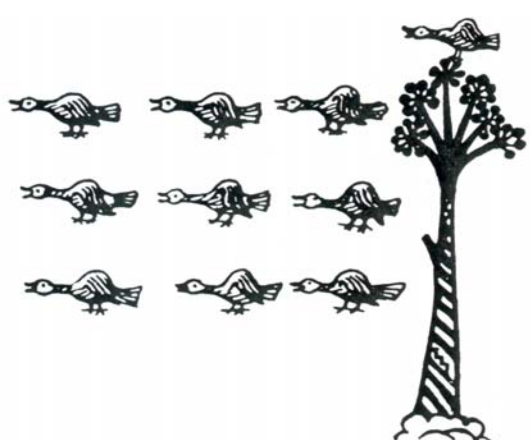
Triginta III erant columbae, quas prius conspexit volantes. Item aliae tantae fiunt LXVI, et tertiae tantae fiunt XCVIIII. Adde sedentem, et erunt C.

Von einer Taube

Eine Taube saß auf einem Baum, sah andere Tauben vorbeifliegen und sprach zu ihnen: „Oh wenn ihr doch noch einmal so viele wäret und noch einmal soviele! Dann wäret ihr zusammen mit mir 100.“ Es sage, wer kann, wieviele Tauben zuerst vorbeiflogen.

Lösung

Es waren 33 Tauben, die sie zuerst fliegen sah. Noch einmal so viele macht 66 und ein drittes Mal so viele macht 99. Füge noch die sitzende hinzu und es werden 100 sein.



„Eine Vierteltaube spricht“. Gott Grüß Euch-Aufgabe aus dem *Columbia-Algorismus*, S. 109.

(46) PROPOSITIO DE SACCULO AB HOMINE INVENTO

Quidam homo ambulans per viam invenit sacculum cum talentis duobus. Hoc quoque alii videntes dixerunt ei: Frater, da nobis portionem inventionis tuae. Qui renuens noluit eis dare. Ipsi vero irruentes diripuerunt sacculum, et tulit sibi quisque solidos quinquaginta. Et ipse postquam vidit se resistere non posse, misit manum et rapuit solidos quinquaginta. Dicat, qui vult, quot homines fuerunt.

SOLUTIO

Apud quosdam talentum LXXV pondo vel libras habet. Libra vero habet solidos aureos LXXII. Septuagies quinquies LXXII ducti fiunt V CCCC, qui numerus duplicatus facit X DCCC. In X milibus et octingentis sunt quinquagenarii CCXVI. Tot homines idcirco fuerunt.

Von einem Mann, der einen Geldbeutel fand

Ein Mann ging auf der Straße und fand einen Geldbeutel mit 2 *talenta*. Auch andere sahen dies und sagten zu ihm: „Bruder, gib uns einen Teil deines Fundes!“ Er lehnte ab und wollte ihnen nichts geben. Diese aber stürzten sich auf ihn und raubten den Geldbeutel, und ein jeder nahm sich 50 *solidi*. Und als er selbst sah, dass er dies nicht verhindern konnte, streckte er seine Hand aus und nahm 50 *solidi*. Es sage, wer will, wieviele Menschen es waren.

Lösung

Bei bestimmten Völkern besteht ein *talentum* aus 75 Pfund oder *librae*. Eine *libra* besteht aus 72 goldenen *solidi*. 75 mal 72 gerechnet macht 5400, diese Zahl verdoppelt macht 10800. In 10800 ist 50 216mal enthalten. Soviele Menschen waren es also.

(47) PROPOSITIO DE EPISCOPO QUI IUSSIT XII PANES IN CLERO DIVIDI

Quidam episcopus iussit XII panes dividi in clero. Praecepit enim sic, ut singuli presbyteri binos accipe-rent panes, diaconi dimidium, lector quartam partem. Ita tamen fiat, ut clericorum et panum unus sit nume-rus. Dicat, qui valet, quot presbyteri vel quot diaconi aut quot lectores esse debent.

SOLUTIO

Quinquies bini fiunt X, id est, V presbyteri decem panes receperunt, et diaconus unus dimidium panem, et inter lectores VI habuerunt panem et dimidium. Iunge V et I et VI in simul, et fiunt XII. Rursusque iunge X et semis et unum et semis, fiunt XII. Hi sunt XII panes, qui simul iuncti faciunt homines XII et panes XII. Unus est ergo numerus clericorum et panum.

Von einem Bischof, der befahl 12 Brote unter seinem Klerus zu verteilen

Ein Bischof befahl, 12 Brote unter seinem Klerus aufzuteilen. Er befahl jedoch, dass jeder Priester zwei, jeder Diakon ein halbes und jeder Novize ein Viertel Brot bekommen sollte. Doch dies sollte so geschehen, dass die Zahl der Kleriker und die der Brote dieselbe sei. Es sage, wer kann, wieviele Priester, wieviele Diakone und wieviele Novizen es sein müssen.

Lösung

5 mal 2 ist 10, das heißt, 5 Priester bekamen 10 Brote, ein Diakon bekam ein halbes Brot und die 6 Novizen hatten zusammen 1½ Brote. Addiere 5, 1 und 6, macht 12. Addiere ferner 10, ½, 1 und ½, macht 12. Das sind 12 Brote, zusammen sind es 12 Menschen und 12 Brote. Die Zahl der Kleriker und der Brote ist dieselbe.

(48) PROPOSITIO DE HOMINE QUI OBVIAVIT SCOLARIIS

Quidam homo obviavit scolariis et dixit eis: Quanti estis in scola? Unus ex eis respondit dicens: Nolo hoc tibi dicere. Tu numera nos bis, multiplica ter. Tunc divide in quattuor partes. Quarta pars numeri, si me addis cum ipsis, centenarium explet numerum. Dicat, qui potest, quanti fuerunt, qui pridem obviaverunt ambulanti per viam.

SOLUTIO

Tricies ter bini fiunt LXVI. Tanti erant, qui pridem obviaverunt ambulanti. Qui numerus bis ductus CXXXII reddit. Hos multiplica ter, fiunt CCCXCVI. Horum quarta pars XCVIIII sunt. Adde puerum respondentem, et reperies C.

Von einem Mann, der Schülern begegnete

Ein Mann begegnete Schülern und sprach zu ihnen: „Wieviele seid ihr in der Schule?“ Einer von diesen antwortete ihm mit den Worten: „Ich will dir das nicht sagen. Aber rechne uns zweimal und multipliziere diese Zahl mit drei. Teile dann in vier Teile. Der vierte Teil ergibt, wenn du mich dazurechnest, die Zahl 100.“ Es sage, wer will, wieviele es waren, die ursprünglich dem Wanderer auf der Straße begegneten.

Lösung

33 mal 2 ergibt 66. So viele waren es, die dem Wanderer begegneten. Diese Zahl verdoppelt, macht 132. Multipliziere diese Zahl mit 3, macht 396. Der vierte Teil davon ist 99. Füge noch den antwortenden Buben hinzu, und du wirst 100 erhalten.

(49) PROPOSITIO DE CARPENTARIIS

Septem carpentarii septenas rotas fecerunt. Dicat, qui vult, quot carra erexerunt.

SOLUTIO

Duc septies VII, fiunt XLVIIII. Tot rotas fecerunt. XII vero quater ducti XL et VIII reddunt. Super XL et VIIII rotas XII carra sunt erecta, et una superfuit.

Von den Wagenmachern

Sieben Wagenmacher verfertigten je sieben Räder. Es sage, wer will, wieviele vierrädrige Wagen sie bauten.

Lösung

Rechne 7 mal 7, macht 49. So viele Räder fertigten sie an. 12 mal 4 ist 48. Mit 49 Rädern wurden 12 Wagen gebaut und ein Rad blieb übrig.

(50) ALIA PROPOSITIO

Centum metra vini, rogo, ut dicat, qui valet, quot sextarios capiunt, vel ipsa etiam centum metra quot meros habent.

SOLUTIO

Unum metrum capit sextarios XL et VIII. Duc centies XLVIII, fiunt IIII DCCC. Tot sextarii sunt. Similiter et unum metrum habet meros CCLXXXVIII. Duc centies CCLXXXVIII, fiunt XXVIIIDCCC. Tot meri sunt.

Eine andere Rechnung

Es sage bitte, wer kann, wieviele *sextarii* 100 *metra* Wein fassen oder wieviele *meri* 100 *metra* ergeben.

Lösung

Ein *metrum* fasst 48 *sextarii*. Rechne 100 mal 48, macht 4800. Ebensoviele *sextarii* sind es. Ebenso umfasst ein *metrum* 288 *meri*. Rechne 100 mal 288 macht 28800. Ebensoviele *meri* sind es.

(51) PROPOSITIO DE VINO IN VASCULIS A QUODAM PATRE DISTRIBUTO

Quidam paterfamilias moriens dimisit IIII filiis suis IIII vascula vini. In primo vase erant modia XL, in secundo XXX, in tertio XX, et in quarto X. Qui vocans dispensatorem domus suae ait: Haec quattuor vascula cum vino intrinsecus manente divide inter quattuor filios meos, sic tamen, ut unicuique eorum aequalis sit portio tam in vino quam et in vasis. Dicat, qui intelligit, quomodo dividendum est, ut omnes aequaliter ex hoc accipere possint.

SOLUTIO

In primo siquidem vasculo fuerunt modia XL, in secundo XXX, in tertio XX, in quarto X. Iunge igitur XL et XXX et XX et X, fiunt C. Tunc deinde centenarium idcirco numerum per quartam divide partem. Quarta namque pars centenarii XXV reperitur, qui numerus bis ductus quinquagenarium de se reddit numerum. Eveniunt ergo unicuique filio in portione sua XXV modia, et inter duos L. In primo XL et in quarto sunt modii X. Hi iuncti faciunt L. Hoc dabis inter duos filios. Similiter iunge XXX et XX modios, qui fuerunt in secundo et tertio vasculo, et fiunt L, et hoc quoque similiter ut superius dabis inter duos, et habebunt singuli XXV modia, eritque id faciendo singulorum aequa filiorum divisio tam in vino quam et in vasis.

Von einem Familienvater, der Wein in Flaschen aufteilte

Ein Familienvater teilte auf dem Sterbebett unter seinen vier Söhnen vier Flaschen mit Wein auf. In der ersten Flasche waren 40 *modia*, in der zweiten 30, in der dritten 20 und in der vierten 10. Er rief den Verwalter seines Hauses und sagte zu ihm: „Teile diese 4 Flaschen mit Wein unter meinen 4 Söhnen auf, doch so, dass ein jeder von ihnen den gleichen Anteil erhält sowohl an Wein als auch an Flaschen!“ Es spreche, wer erkennt, wie man teilen muss, damit alle den gleichen Anteil davon erhalten können.

Lösung

In der ersten Flasche waren 40 *modia*, in der zweiten 30, in der dritten 20 und in der vierten 10. Addiere 40, 30, 20 und 10, macht 100. Dann teile die Zahl 100 durch 4. Als vierter Teil von 100 findet sich 25, diese Zahl verdoppelt, liefert das Ergebnis 50. Es kommen daher auf jeden Sohn bei der Teilung 25 *modia*, und auf zwei Söhne 50 *modia*. In der ersten Flasche sind 40, in der vierten 10 *modia*. Diese addiert macht 50 *modia*. Diese wirst du zwei Söhnen geben. Addiere auf gleiche Weise 30 und 20 *modia*, die in der zweiten und dritten Flasche waren, macht 50 *modia*, und gib diese auf gleiche Weise wie vorhin den anderen zwei Söhnen, und sie werden jeder für sich 25 *modia* haben, und bei einer solchen Vorgangsweise wird es für jeden der Söhne sowohl beim Wein als auch bei den Flaschen eine gerechte Teilung sein.

¶ Ein Testament

Jtm̄ es lygt ein vatter am todtbet vnd stirbt auch vn̄ er leßt kinder vn̄ sagt nicht wieuil/ vn̄ leßt gelt vn̄ sagt auch nit wie vil/ vnnd bestelt seinē letstē willē also/das man einē kind so vil sol gebē als dem andern. Vnnd dē ersten gibt man 1 ƒ vnd $\frac{1}{10}$ des überigē geltz Vn̄ dem andern 2 ƒ vnd auch $\frac{1}{10}$ des überigē geltz. Vnd also fürt alweg einem 1 ƒ mer dan dē andern

„Die unbekannte Erbschaft" aus *Behend vnd hüpsch Rechnung vff allen Kauffmannschaften* v.Johannes Widmann. Pforzheim 1508, S. 97v.

(52) PROPOSITIO DE HOMINE PATREFAMILIAS

Quidam paterfamilias iussit XC modia frumenti de una domo sua ad alteram deportari, quae distabat leuvas XXX, ea vero ratione, ut uno camelo totum illud frumentum deportaretur in tribus subvectionibus et in unaquaque subvectione XXX modia portarentur, camelus vero in unaquaque leuva comedat modium unum. Dicat, qui velit, quot modii residui fuissent.

SOLUTIO

In prima subvectione portavit camelus modios XXX super leuvas XX et comedit in unaquaque leuva modium unum, id est, modios XX comedit, et remanserunt X. In secunda subvectione similiter deportavit modios XXX, et ex his comedit XX, et remanserunt X. In tertia vero subvectione fecit similiter: Deportavit modios XXX, et ex his comedit XX, et remanserunt decem. Sunt vero de his, qui remanserunt, modii XXX et de itinere leuvae X. Quos XXX in quarta subvectione domum detulit, et ex his X in itinere comedit, et remanserunt de tota illa summa modia tantum XX.

Von einem Familienvater

Ein Familienvater befahl, 90 Scheffel Getreide von dem einen Haus zu seinem anderen Haus zu bringen, das 30 *leuvae* vom ersten Haus entfernt war, unter der Bedingung, dass das gesamte Getreide von einem Kamel in drei Fuhren, und dass bei jeder Fuhre 30 Scheffel getragen werden, das Kamel aber bei jeder Fuhre einen Scheffel Getreide pro *leuva* fresse. Es sage, wer will, wieviele Scheffel übrig bleiben.

Lösung

Bei der ersten Fuhre trug das Kamel 30 Scheffel 20 *leuvae* weit und fraß pro *leuva* einen Scheffel, das sind 20 Scheffel, 10 Scheffel blieben übrig. Bei der zweiten Fuhre trug es auf gleiche Weise 30 Scheffel und fraß 20, und es blieben 10 Scheffel übrig. Bei der dritten Fuhre machte es das Gleiche. Es trug 30 Scheffel und fraß davon 20, 10 blieben übrig. Es blieben somit 30 Scheffel und bezüglich des Weges 10 *leuvae* übrig. Diese 30 Scheffel brachte es in einer vierten Fuhre ins Haus und verzehrte davon auf dem Weg 10 Scheffel. Es blieben von jener Gesamtheit nur 20 Scheffel übrig.

(53) PROPOSITIO DE HOMINE PATREFAMILIAS MONASTERII XII MONACHORUM

Quidam pater monasterii habuit XII monachos. Qui vocans dispensatorem domus suae dedit illi ova CCIIII iussitque, ut singulis aequalem daret ex eis omnibus portionem. Sic tamen iussit, ut inter V presbyteros daret ova LXXXV et inter quattuor diaconos LXVIII et inter tres lectores LI. Dicat, rogo, qui valet, quot ova unicuique ipsorum in portione evenerunt, ita ut in nullo nec superabundet numerus nec minuatur, sed omnes, ut supra diximus, aequalem in omnibus accipiant portionem.

SOLUTIO

Ducentos igitur quattuor per XII[am] divide partem. Horum quippe pars XII[a] in septima decima resolvitur parte, quia sive duodecies XVII sive decies septies XII miseris, CCIIII reperies. Sicut enim octogenarius quintus numerus septimum decimum quinquefarie de se reddit numerum, ita sexagenarius octavus quadrifarie et quinquagesimus primus trifarie. Iunge ergo V et IIII et III, fiunt XII. Isti sunt homines XII. Rursusque iunge LXXXV et LXVIII et LI, fiunt CCIIII. Haec sunt ova CCIIII. Veniunt ergo singulorum ex his in parte ova XVII per duodecimam partem septimum decimum numerum aequa lance divisum.

Vom Abt eines Klosters mit zwölf Mönchen

Dem Abt eines Klosters unterstanden 12 Mönche. Dieser rief den Verwalter seines Klosters und gab ihm 204 Eier; er befahl ihm, dass er jedem Einzelnen den gleichen Anteil von allem gebe. Doch er befahl, dass er unter den 5 Priestern 85 Eier, unter den 4 Diakonen 68 Eier und unter den drei Novizen 51 Eier verteile. Es spreche, bitte, wer kann, wieviele Eier einem jeden von ihnen bei der Teilung zufielen, so dass die Zahl bei keinem über- oder unterschritten wird, sondern alle, wie wir vorhin sagten, den gleichen Anteil von allem erhalten.

Lösung

Teile 204 durch 12. Der zwölfte Teil davon ist 17, denn wenn du 12 mal 17 oder 17 mal 12 rechnest, erhältst du 204. Wenn nun 85 17 fünfmal enthält, so enthält 68 diese Zahl viermal und 51 enthält sie dreimal. Addiere 5, 4 und 3, macht 12. Das sind 12 Männer. Addiere nunmehr 85, 68 und 51, macht 204. Das sind 204 Eier. Es kommen daher auf jeden Einzelnen von ihnen bei der Teilung 17 Eier, weil die vorige Zahl bei richtiger Rechnung durch 12 geteilt 17 ergibt.

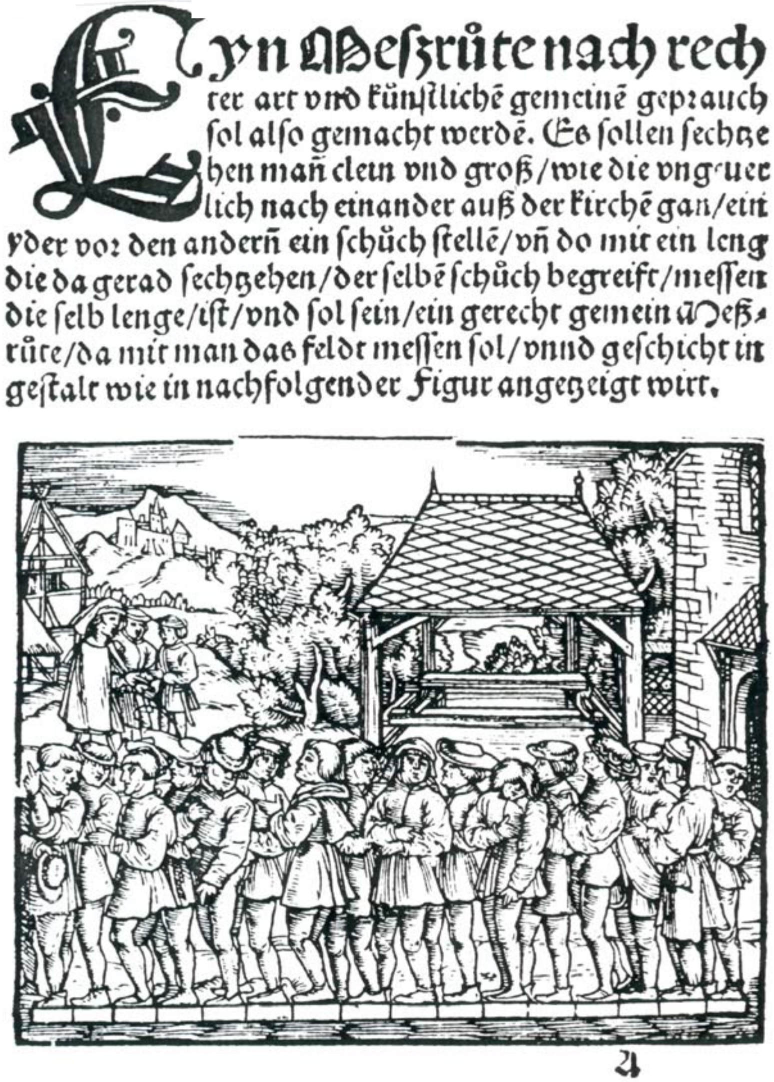
Die römischen Maßsysteme

Das römische Maßsystem ist sehr stark vom griechischen Maßsystem beeinflusst. Viele Maßbezeichnungen werden als griechische Fachbegriffe im Lateinischen weiterverwendet. Daneben spielt das römische Duodezimalsystem bei den jeweiligen Maßsystemen eine große Rolle. Neben den klassischen römischen Maßen finden sich gelegentlich auch spezielle Maße, die nur in einzelnen Provinzen verwendet wurden. Bestimmte Maße, vor allem Geldmaße, haben sich im Laufe der Zeit in ihrem Wert verändert. Die nachfolgende Übersicht über die in Rom verwendeten Maßsysteme ist folglich nur bedingt auf die Aufgaben von TEXT 7 anwendbar.

Längenmaße:
Es lassen sich dabei drei Gruppen unterscheiden:

a. *Körpermaße*: Sie sind kleinere Längen, die sich als Teile des menschlichen Körpers unmittelbar anbieten.
b. *Feldmaße*: Zu diesen Längen zählen Größen, die landwirtschaftlichen Tätigkeiten entsprechen.
c. *Wegemaße*:

	Bedeutung	*actus*	*pertica*	*passus*	*pes*
actus	Trieb	1	12	24	120
pertica = decempeda	Messrute zu 10 Fuß		1	2	10
passus	Doppelschritt			1	5
pes	Fuß				1



Eyn Meßrüte nach rechter art vnd künstlichē gemeinē gepraůch sol also gemacht werdē. Es sollen sechzehen mañ clein vnd groß/wie die vngeuerlich nach einander auß der kirchē gan/ein yder vor den anderñ ein schůch stellē/vñ do mit ein leng die da gerad sechzehen/der selbē schůch begreift/messen die selb lenge/ist/vnd sol sein/ein gerecht gemein Meßrüte/da mit man das feldt messen sol/vnnd geschicht in gestalt wie in nachfolgender Figur angezeigt wirt.

„Bestimmung der Messrute zu 16 Schuh“ aus Köbel Jakob: *Von ursprung der Teilung, Maß und Messung deß Ertrichs der Ecker, Wyngarten, Krautgarten, vnd anderer Velder*. Oppenheim 1522, S. A 1r.

Römische Wegemaße:

	Bedeutung	*milia passuum*	*stadium*	*passus*	*pes*
milia passuum	Meile ca.1478,5m	1	8	1000	5000
stadium			1	125	625
passus	Doppelschritt			1	5
pes	Fuß				1

Das Grundmaß *pes* (zu 29,6cm) wurde als *as* duodezimal eingeteilt bis zu *sicilicus* (= ¼ *uncia*). Eine andere Einteilung, die bei Künstlern und Handwerkern gebräuchlich war, lautete 1 *pes* = 16 *digiti*. Selten gebraucht wurde das Längenmaß *cubitus* oder *ulna* (Elle) = 1 ½ pes.

leuva oder *leuca* war ein gallisches Wegemaß. 1 *leuca* = 7500 *pes* (2220m)

Flächenmaße:

Bevor es auf eine exakte Bestimmung von Flächen (Feldern, Grundstücken etc.) ankam, begnügte man sich damit, deren Größe zu umschreiben, z.B. durch eine auf das betreffende Feld bezogene Arbeit. So war das *iugerum* ein Flächenstück, das von einem Joch, also von zwei Ochsen an einem Tag gepflügt wurde. Die Form der Flächeneinheiten war meistens ein Quadrat über der Längeneinheit. Man brauchte dabei das Wort Quadrat gar nicht zu erwähnen, da ja aus dem Zusammenhang ersichtlich war, ob es sich in dem jeweiligen Fall um eine Länge oder Fläche handelte.
Bei den Römern sind 2 ursprünglich voneinander unabhängige Gruppen von Flächenmaßen zu erkennen. Die eine enthält Quadrate der Längeneinheiten *pes*, *pertica* und *actus*, zur anderen gehört das *iugerum* und seine Vielfachen. Beide Gruppen wurden miteinander in Verbindung gebracht, indem man 1 *iugerum* = 2 *actus* setzte. Dadurch wurde die *pertica* zu 1 *scripulum* (= $^{1}/_{288}$) des *iugerum*.

	Bedeutung	*saltus*	*centuria*	*heredium*	*iugerum*	*actus* = *aripennus*	*pertica*	*pes*
saltus	Weideplatz	1	4					
centuria	100 her.		1	100	200			
heredium	Erbschaft			1	2			
iugerum	Joch				1	2	288	28800
actus = *aripennus*	Trieb					1	144	14400
pertica = *decempeda*	10 Fuß						1	100
pes	Fuß							1

Raummaße:

Die ältesten Raummaße, die im täglichen Leben benötigt wurden, waren Hohlmaße, die nicht in Kubikform entwickelt wurden. Die Form der Einheitsgefäße war wohl zuerst ein Zylinder. Man brauchte Gefäße beim Transport und bei der Verwendung von trockenen und flüssigen Stoffen, Schaffe oder Körbe für Getreide, Eimer und Kannen für Öl, Wein und dergleichen. Erst als man rechnen und genauer messen musste, wurden die alten Maße in Beziehung zueinander gebracht.

„Römische Sklaven füllen einen *modius* mit Korn“. Mosaik (1. Jh.v.Chr.). Ostia. Aula dei mensores.

Mit den Hohlmaßen haben die Römer auch deren Namen von den Griechen übernommen. Als Grundmaß galt die *amphora* (= $^2/_3$ *metreta*), auch *Quadrantal* genannt, weil der Körper – es ist nämlich ein Kubikfuß – auf allen Seiten von einem Quadrat begrenzt wird.

Flüssigkeitsmaße:

Liter		Bedeutung	*metreta*	*amphora*	*urna*	*congius*
39,39	*metreta*		1	1½	3	12
26,26	*amphora*	Doppelhenkelkrug		1	2	8
13,13	*urna*	Wasserkrug			1	4
3,283	*congius*	Muschel				1

Trockenmaße:

Liter		Bedeutung	*medimnos*	*modius*	*semimodius*	*choinix*
52,53	*medimnos*	Vorrat	1	6	12	48
8,75	*modius*	Scheffel		1	2	8
4,37	*semimodius*	Halbscheffel			1	4
1,09	*choinix*	Brot				1

Maße für Trockenes und Flüssiges:

Liter		Bedeutung	*sextarius*	*hemina*	*quartarius*	*acetabulum*	*cyathus*
0,547	*sextarius* = $^1/_6$ *congius*		1	2			
0,274	*hemina*	Ein Halb		1	2		
0,138	*quartarius*	Ein Viertel			1	2	
0,069	*acetabulum*	Essigschale				1	1 ½
0,046	*cyathus*	Schöpflöffel					1

Ein kleineres Maß = ¼ *cyathus* war der Löffel (*ligula*)

Der Zusammenhang mit den obigen Maßen ergab sich durch die Beziehung 72 *sextarii* = 1 *metreta* bzw. 96 *sextarii* = 1 *medimnos*.

Gewichtsmaße:

Die Gewichtsmaße spielten im täglichen Leben als Mengen- und Wertmesser eine besonders wichtige Rolle in dreierlei Hinsicht: einmal war ein großes Gewicht nötig für schwere Lasten, dann ein mittleres für Waren des täglichen Bedarfs (z.B. Lebensmittel) und ein kleineres für feinere und wertvollere Dinge wie Gewürze oder auch Edelmetallstücke, die bei Preisen und Löhnen als Geldersatz dienen konnten.

Die Grundlage des römischen Gewichtssystems war die *libra*. Ursprünglich ein größeres Kupfergewicht (*as*) wurde ihr Gewicht in der Kaiserzeit mit 75 attischen Denaren = 327,45g festgesetzt. Die *libra* wurde in 12 *unciae* unterteilt. Kleinere Gewichtseinheiten kamen zum Teil aus dem Griechischen dazu.

	uncia	*sicilicus*	*sextula*	*drachma*	*scripulum*	*obolus*	*siliqua*
uncia	1	4	6	8	24		
sicilicus		1	1 ½	2	6		
sextula, exagium, solidus			1	1 $^1/_3$	4	8	24
drachma				1	3	6	18
scripulum					1	2	6
obolus						1	3
siliqua							1

Bei der Einführung der Silberwährung wurde im Jahre 269/8 v.Chr. ein *denarius* ausgeprägt im Gewicht von $^{1}/_{72}$ *libra* (=1 *sextula* = 4,548g), das später auf $^{1}/_{84}$ reduziert und nach Nero auf $^{1}/_{96}$ libra festgesetzt wurde. Ebenfalls im Gewicht von 1 *sextula* hat im Jahre 307 **Konstantin der Große** ein Goldstück, das νόμισμα prägen lassen. Kleinere Gewichte in Byzanz waren noch das Gran = $^{1}/_{24}$ *uncia*, sowie das κεράτιον = $^{1}/_{24}$ *exagium*, das auch als Rechnungsgeld = $^{1}/_{24}$ νόμισμα diente und sich als Feinheitsbezeichnung (Karat) bis heute erhalten hat.

talentum ist ein ursprünglich babylonisches Gewichtsmaß *(biltu)* von 60,48 kg (schweres Talent) bzw. 30,24 kg (leichtes Talent). Bei den Griechen war es zuerst ein Handelsgewicht zu 36,2 kg; bei der Reform **Solons** wurde es zusätzlich als Münzgewicht zu 26,2 kg festgelegt.

plaustrum kommt als Handelsgewicht in klassischer Zeit nicht vor. Nach dem *Codex Theodosianus* (438 n.Chr.) war das Ladegewicht eines *plaustrum* (Lastwagen) mit 1089 *librae* beschränkt (Cod. Theod. 8, 5, 8).

Die römische *libra* bildete mit ihren 12 *unciae* auch die Grundlage für das mittelalterliche Gewichts- und Münzsystem. **Karl der Große** hat einen Goldsolidus = $^{1}/_{72}$ *libra* entsprechend dem byzantinischen νομισμα prägen lassen. Daraus ergibt sich auch ein *terminus, post quem* für die Abfassungs von TEXT 7 (Aufgabe 46).

Die Lösung linearer und quadratischer Gleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten von den Anfängen bis zum Mittelalter

Bei allen Kulturvölkern treten im Zusammenhang mit der Bewältigung alltäglicher Situationen, etwa im Wirtschaftsleben, bei Gemeinschaftsaufgaben (Errichtung von Bauwerken) oder bei der Landverteilung, mathematische Probleme auf, die wir heute in der Form einer Gleichung oder eines Gleichungssystems mit Unbekannten darstellen und mittels geeigneter Termumformungen lösen würden. Als ursprünglichste Beispiele solcher Aufgaben lassen sich Dreisatzaufgaben ansehen. Sie kommen schon in den ältesten Quellen vor.
Aus 3 ½ hekat Mehl wurden 80 Brote gemacht. Wieviel Mehl wurde für 1 Brot gebraucht? Wieviel Brote wurden aus 1 hekat Mehl gemacht? (***Papyrus Rhind*** Aufgabe 69)

Aus altbabylonischer Zeit gibt es Aufgaben der Form: Für 1 *Mine* Silber werden 12 *Schekel* Zins gegeben. Welches Kapital ergibt 1,40 (= 1 *Mine*, 40 *Schekel*) Zins? (Mathematische Keilschrifttexte Ed. O. Neugebauer. 1935. Bd. 1, S. 355)
(1 *Mine* = 60 *Schekel*)

Bei den Ägyptern und Babyloniern werden solche Aufgaben einfach vorgerechnet, allenfalls wird das Ergebnis durch eine Probe kontrolliert. Dabei wird die Rechnung stets mit bestimmten Zahlen durchgeführt, jedoch so, dass statt der gegebenen Zahlen beliebige andere eingesetzt werden können.
In der wissenschaftlichen Mathematik der Griechen tritt weniger der Dreisatz auf, sondern vielmehr seine wissenschaftliche Grundlage, die Proportion.

Ob die Römer ihrerseits Dreisatzaufgaben mittels Proportionen oder einem anderen Verfahren lösten, wissen wir nicht, da uns keine Quellen zur Verfügung stehen. Doch zeigt TEXT 6, dass die *regula de tri* (Dreisatz) den Römern bekannt war.

Eine mathematische Präzisierung der Lösung von Dreisatzaufgaben erfolgte im Abendland erst im 13. Jahrhundert. So schreibt **Leonardo von Pisa** (*Scritti di Leonardo Pisano* Ed. B. Boncompagni.Bd.1 S.83f.):

Bei allen Geschäftsrechnungen treten immer vier proportionale Zahlen auf, von denen drei bekannt und die übrige unbekannt sind. Ein Beispiel*: Es seien 100 Rotuli (Münzen) gleich 40 Libri (Pfund). Wieviel sind 5 Rotuli?*
Leonardo schreibt die Zahlen in dem folgenden Schema auf:

l.	R.
40	100
	5

Die gegenüber stehenden Zahlen (*positi ex adverso*) sind miteinander zu multiplizieren und durch die restlichen zu dividieren.
In den Lehrbüchern des Mittelalters sind Dreisatzaufgaben zahlreich vertreten. Im ***Bamberger Rechenbuch*** (1483) [10.Cap.] heißt der Dreisatz *die gulden regel Dano das sie so kospar vnd nücz* ist. Sie wird folgendermaßen beschrieben: *Un ist drey ding die du seczt. Darvntt mus dz erst vn leczt alemol gleych* (gleichartig*) sein. Vn zu lecztn sol du seczn dz du wild wissen dasselb vn dz mittel sol du mitein multipliciren.vn in das erst teilen.*

„18 Tagelöhner haben in sechs Tagen 12 Zeilen Weinreben behackt. Wieviel Zeilen können fünf Tagelöhner in 30 Tagen bearbeiten?"
aus: *Neue Bücher über Berechnungen mit Ziffern und auf den Linien, dazu einige Regeln und Beispiele auch für den Münzwechsel wie kaufmännisch üblich – in kurzer und nützlicher Weise ausgewählt*.
Von Ondrej Klatovský. Prag, 1558.

Eine weitere Methode, algebraische Aufgaben ohne die Symbolik der Algebra zu lösen, ist die Methode des falschen Ansatzes oder der Versuchszahl. Dieses Verfahren wurde möglicherweise schon von den Babyloniern verwendet und war bis in die Renaissancezeit weit verbreitet, bis es allmählich von der mit Symbolen arbeitenden Algebra verdrängt wurde. Zur Veranschaulichung dieses Verfahrens diene das folgende Beispiel aus der *Practica* des ***Algorismus Ratisbonensis*** (vor 1450).

In Aufgabe 204 geht es um den Geschäftsgewinn von 365 Gulden (fl), den drei Kaufleute gemäß ihrer Einlagen im Verhältnis $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$ aufteilen wollen. Wir würden die Aufgabe über folgenden Gleichungsansatz lösen: x sei der Gewinnanteil des ersten Kaufmanns. Dann ist $\frac{2}{3}x$ der des zweiten und $\frac{1}{2}x$ der des dritten. Demnach haben wir

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x = 365 \text{ (fl)}$$

Im Algorismus Ratisbonensis wird jedoch von einer Versuchszahl oder einem falschen Ansatz ausgegangen, wobei die Wahl ausdrücklich begründet wird:

Querendus est numerus, in quo illa fracta habentur, multiplicando scilicet denominatores per se faciunt 24 et capiamus eius medietatem scilicet 12 et erit brevius.

Zu suchen ist eine Zahl, in der jene Brüche enthalten sind; werden die Nenner miteinander multipliziert, so ist das Ergebnis 24; wir wollen die Hälfte davon nehmen, nämlich 12; dann wird es kürzer sein."

Zunächst bildet man also das Nennerprodukt 24, in dem „natürlich" alle Brüche aufgehen, erkennt aber dann, dass die Hälfte 12, mit der die Rechnung „kürzer" wird, dasselbe leistet. Nun berechnet man mit der Versuchszahl 12 fl die Gewinnanteile der Kaufleute: 6 fl, 4 fl und 3 fl ergeben aber zusammen 13 fl anstatt 365 fl. Daher verwendet man anschließend den Dreisatz:

Dic 13 dant 365, quot 6 dabunt?

Rechne 13 ergibt 365, wieviel wird 6 ergeben?

Als Anteil des ersten Kaufmanns erhält man somit $^{365\,\cdot\,6}/_{13}$ fl = 168 $^{6}/_{13}$ fl. Analog berechnet man die Anteile der beiden anderen Kaufleute.

Die Methode des falschen Ansatzes beruht also darauf, dass zunächst von einer willkürlichen (in der Regel für die Rechnung günstigen) Versuchszahl ausgegangen und dann der Dreisatz „nachgeschoben" wird. Ist f eine gegebene Funktion, und wird der Wert x gesucht, für den $f(x) = b$ ist, so setzt man einen Versuchswert x_1 ein, berechnet $f(x_1) = b_1$, und schließt aus dem Verhältnis oder dem Unterschied zwischen b und b_1 auf x.

Da der Anwendung des Dreisatzes eine Proportionalität zugrunde liegen muss, sind allgemeine lineare Probleme entsprechend umzuformen, wenn der falsche Ansatz zum Ziel führen soll. Ein einfaches historisches Beispiel hierzu ist die Aufgabe 46 aus einem anonymen ***byzantinischen Rechenbuch*** des 15. Jahrhunderts (Ed. Hunger Herbert/Vogel K. Wien 1963):

Auf einer Wiese tanzten Mädchen, und es ging ein Mann vorbei und grüßte sie und sprach: Schön tanzt ihr 100 Mädchen. Und eine von ihnen antwortete und sprach: Wir sind keine 100, sondern wenn wir nochmals so viele wären, wie wir sind, und die Hälfte und das Viertel <mehr> und mit dir dazu, sollten wir 100 sein. Ich möchte wissen, wie viele es waren.

Als Lösung gibt der Verfasser an:

Mache es so: Nimm die kleinste Zahl, die Halbe und Viertel enthält, und es ist 4. Nun mache oben auch 4 zur Grundlage. Gleichwie jene sagte: nochmals so viele, wie wir sind, und die Hälfte und das Viertel, so mache es auch du mit den 4 und nimm andere 4 und die Hälfte von 4 und das Viertel von 4, und es gibt 11. Aber da sie sagte, mit jenem sollten wir 100 sein, wirst du 1 wegnehmen, damit 99 übrigbleiben, und dass du es später wieder zulegst. Und gerade die 99 teile durch 11, und es kommen 9 heraus. Dann multipliziere die 9 mit den 4, und es gibt 36, und es waren 36 Mädchen.

Der Autor wendet also den einfachen falschen Ansatz mit der von ihm begründeten Versuchszahl 4 an. Da zahlreiche Aufgaben in TEXT 7 diesem Typ von „Gott-grüß-euch-Aufgaben" entsprechen, ist der Schluss naheliegend, dass die Methode des falschen Ansatzes auch bei der Lösung dieser Aufgaben zur Anwendung kam.

Bei Aufgaben aus der Praxis sind die gesuchten Größen Mengen von Gegenständen (Brote, Anzahl von Menschen und Tagen, die für eine bestimmte Arbeit benötigt werden, Längen, Breiten und Tiefen von Gräben usw.), bei denen eine bestimmte Bezeichnung durch die Aufgabe vorgegeben ist. Erst bei Abstraktion oder bei Scherz- und Rätselaufgaben kommt es vor, dass die gesuchten Größen reine Zahlen ohne konkrete Bedeutung sind. Die Einführung einer bestimmten allgemeinen Bezeichnung für die Unbekannte, die im Laufe der Zeit in ein Symbol übergeht, das in der Rechnung wie eine bekannte Größe behandelt werden kann, ist oft als ein wichtiger Schritt bei der Lösung von Aufgaben besonders hervorgehoben worden. Wir wissen von allen alten Kulturvölkern, dass sie Verfahren entwickelten, um durch gewisse Aussagen festgelegte „Unbekannte" zu ermitteln. Ansätze einer Gleichungslehre gibt es bei den Chinesen, den Indern, den Babyloniern und den Ägyptern. So steht im ***Papyrus Rhind*** die folgende Aufgabe (*Aufgabe 24*):

Ein Haufen und sein Siebtel ist 19

d.h. $x + {}^{x}/_{7} = 19$

In dieser und den folgenden Aufgaben steht für die gesuchte Zahl das Wort $^{c}\underline{h}^{c}$, das früher mit *hau*, heute mit *acha* vokalisiert wird und soviel wie „Haufen" bedeutet. Die Aufgabe 28 des Papyrus lautet:

$^{2}/_{3}$ hinzu, $^{1}/_{3}$ weg, 10 ist der Rest.

Das bedeutet: $(x + {}^{2}/_{3}x) - {}^{1}/_{3}\,(x + {}^{2}/_{3}x) = 10$

Zu diesem Beispiel gibt der Text auch einen Lösungsweg an:

Mache $^{1}/_{10}$ von diesen 10, es macht 1, der Rest ist soviel wie 9.

Der Rechner kann nun so überlegt haben: Links ergibt sich im Kopfrechnen $^{10}/_{9}\,x$; um nun $^{9}/_{9}\,x$, also x zu bekommen, muss man beiderseits den 10. Teil (also links $^{1}/_{9}\,x$ und rechts 1) abziehen, und gerade das steht da.

Bei **Diophant** (um 250 n.Chr.) findet sich bereits ein Symbol für die Unbekannte, nämlich ς, das aus dem Endbuchstaben von αριθμος entstanden sein könnte.

In den Aufgaben der ***propositiones ad acuendos iuvenes*** findet sich nirgends ein Hinweis auf ein Zeichen oder einen Begriff für die gesuchte Unbekannte. Ein solcher taucht im Abendland erstmals bei **Leonardo von Pisa** auf. Er verwendet das Wort *res* für die Unbekannte (*Scritti di Leonardo Pisano.* Ed. B. Boncompagni. Rom. 1857–1862. Bd. 1. S. 122):

Si vis dividere 10 in duas partes, que insimul multiplicate faciunt quartam multiplicationis majoris partis in se; pone pro majori partem radicem, quam appellabis rem, remanebunt pro minori partem 10, minus re; que multiplicata in re, venient 10 res, minus censu; et ex multiplicata re in se proveniet census; quia com multiplicatur radix in se, proveniet quadratus ipsius radicis; ergo decem res, minus censu, equantur quarte parti census.

„Wenn du 10 in zwei Teile zerlegen willst, die miteinander multipliziert den vierten Teil des Quadrats des größeren Teiles geben, so nimm den größeren Teil als Unbekannte an und nenne ihn x; dann werden für den kleineren Teil 10 – x bleiben. Beide miteinander multipliziert liefern $10x - x^2$. Und aus der Multiplikation von x mit sich selbst geht x^2 hervor, weil die Unbekannte mit sich multipliziert das Quadrat der Unbekannten selbst liefert."

In moderner Terminologie lautet die Gleichung $10x - x^2 = \frac{1}{4}x^2$.

Man muss sich dabei immer vor Augen halten, dass man damals diese heutige Formaldarstellung nicht kannte. Leonardo gewinnt aber auch durch Umformung seiner Gleichungsaussage das Ergebnis x = 8. Aber es entgeht ihm die Einsicht, dass auch 0 Lösung dieser Gleichung ist.

Die heute allgemein übliche Bezeichnung der Unbekannten mit dem Buchstaben *x* (bzw. *y, z* und *u* für weitere Unbekannte) findet sich erst bei **René Descartes** (1596–1650).

Verfahren zur Auflösung linearer Gleichungen waren offenbar den großen alten Kulturvölkern bekannt. Wir finden Hinweise darauf schon im chinesischen Rechenbuch ***Chiu Chang Suan Shu*** aus der frühen Han-Zeit (202 vChr. – 9 n.Chr.), aber auch in der indischen Literatur. Nicht immer bringen diese Quellen auch Hinweise über die Schritte, die zur Lösung führen. Hier ist **Diophant von Alexandria** ausführlicher. In seiner aus der Zeit um 250 n.Chr. stammenden Schrift (*Diophanti Alexandrini opera omnia cum Graecis commentariis*. Ed. P. Tannery. Leipzig 1893–1895. Bd. 1. S. 15) gibt er Hinweise über die Umformung von Gleichungen, die zur Lösung führen:

Wenn man bei einer Aufgabe auf eine Gleichung kommt, die auf beiden Seiten dieselbe Potenz der Unbekannten, aber mit verschiedenen Koeffizienten enthält, so muss man Gleichartiges von Gleichartigem abziehen (αφαιρειν), bis ein Glied einem Gliede gleich wird. Wenn aber auf beiden Seiten der Gleichung abzuziehende Glieder vorkommen, so muss man die abzuziehenden Glieder auf beiden Seiten addieren (προσθειναι), bis auf beiden Seiten alle Glieder positiv geworden sind; und dann muss man ebenfalls Gleichartiges von Gleichartigem abziehen, bis auf jeder Seite der Gleichung ein Glied übrig bleibt.

Hier sind schon die Methoden beschrieben, die später **Al-Hwarizmi** als *al gabr* und *al muqabala* in die abendländische Mathematik eingeführt hat.

Spezialfälle von quadratischen Gleichungen traten schon früh bei der Lösung geometrischer Probleme auf, in China, Babylon und Indien. Auch bei den Griechen finden wir Aufgaben, deren Lösung auf dem Lösen quadratischer Gleichungen beruht. Bei **Diophant** findet sich neben anderen die folgende Aufgabe (*opera.* Ed. Tannery. Bd. 1. S. 27):

Es sind zwei Zahlen zu finden, so dass ihre Summe und ihr Produkt gleich zwei gegebenen Zahlen sind.

d.h.: $x + y = b, \quad xy = a$.

Diophant geht darauf aus ½ (x-y) zu berechnen; diese Größe setzt er als Unbekannte ς an. Bevor er aber ihren Wert ausrechnet, kann er mit diesem Symbol operieren. Es ist

$$x = {}^{b}/_{2} + \varsigma, \qquad y = {}^{b}/_{2} - \varsigma.$$

Nun kann ς aus

$$xy = ({}^{b}/_{2})^2 - \varsigma^2 = a$$

berechnet werden.

Diophant fügt noch die Bedingung hinzu, dass $\varsigma = \sqrt{({}^{b}/_{2})^2 - a}$ rational sein soll:

Es ist dabei notwendig, dass das Quadrat der halben Summe das Produkt um eine Quadratzahl übertrifft.

Die Regeln für die Lösung einer quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten werden in den uns erhaltenen Teilen des Werkes **Diophants** nicht angegeben. Dass **Diophant** sie beherrscht hat, sieht man daran, dass bei solchen Gleichungen meist ohne weiteres die Lösung angegeben wird, und daran, wie die Bedingung ausgesprochen wird, dass die Lösung rational sein soll. So vermerkt er zur Lösung der Gleichung

$$6x^2 + 3x = 7$$

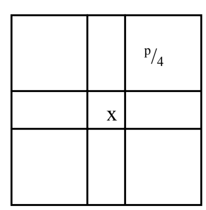
⟨Damit die Gleichung rational lösbar wird⟩, *müsste das Quadrat des halben Koeffizienten von x, vermehrt um das Produkt aus dem Koeffizienten von x² und der Zahl 7, ein Quadrat sein.*

d.h. die Lösung $x = -{}^1/_4 + {}^1/_6 . \sqrt{{}^9/_4 + 6.7}$ ist genau dann rational, wenn der Wurzelterm eine rationale Zahl ist.

Eine vollständige Lösung für quadratische Gleichungen aller Typen finden wir erst Jahrhunderte später in dem klassischen Werk von **Al-Hwarizmi** (*Robert of Chester's Latin translation of the Algebra of al-Khowarizmi*. Ed. L.Ch.Karpinski. New York 1915. S. 70f.). Es ist bemerkenswert, dass auch er zur Begründung geometrische Betrachtungen heranzieht.

Zur Lösung der Gleichung $\quad x^2 + px = q$

benutzt **Al-Hwarizmi** die nebenstehende Planfigur: Den Seiten eines Quadrats mit der Seite *x* werden Rechtecke mit den Seiten *x* und ${}^p/_4$ aufgesetzt. Durch Zufügung von vier Quadraten mit der Seitenlänge ${}^p/_4$ in den Ecken entsteht ein großes Quadrat mit der Seitenlänge $x + {}^p/_2$. Damit gilt:



$$(x + {}^p/_2)^2 = x^2 + 4.x.{}^p/_4 + 4.({}^p/_4)^2 = q + {}^{p^2}/_4,$$

und daraus folgt:

$$x + {}^p/_2 = \sqrt{q + {}^{p^2}/_4}$$

Wenn es also eine Lösung der obigen Gleichung gibt, so muss für *x* gelten:

$$x = -{}^p/_2 + \sqrt{q + {}^{p^2}/_4}$$

Den klassischen Problemen der Griechen, der Dreiteilung des Winkels und der Verdopplung des Würfels (s. Aufgabenteil) liegen kubische Gleichungen zugrunde, die man auf geometrischem Weg zu lösen versuchte.

Schon früh tauchen in der Mathematik Gleichungssysteme auf, bei denen Lösungen in positiven ganzen Zahlen gesucht sind. Solche Gleichungen werden *diophantische Gleichungen* genannt, weil sich **Diophant v. Alexandrien** im Buch I (Aufgaben 12–25) seiner ***Arithmetica*** mit solchen Aufgaben befasst hat. Im TEXT 7 führen die Aufgaben

38, 39 und 47 auf ein System diophantischer Gleichungen. Eine der ältesten uns bekannten derartigen Aufgaben findet sich im Werk des chinesischen Mathematikers **Chang Ch'iu-chien** um 485 n.Chr.:

Ein Hahn kostet 5 sapeks, eine Henne 3 sapeks und 3 Kücken 1 sapek. Wieviele Hähne, Hennen und Kücken, insgesamt 100, kosten zusammen 100 sapeks?

Bezeichnet man die gesuchten Zahlen mit *x,y,z*, so kommt man auf die Gleichungen

$x + y + z = 100$

$5x + 3y + {}^{z}/_{3} = 100$

Chang Ch'iu-chien gibt 3 Lösungen für seine Aufgabe an:

1. 4 Hähne 18 Hennen 78 Kücken,
2. 8 Hähne 11 Hennen 81 Kücken,
3. 12 Hähne 4 Hennen 84 Kücken.

Das „Problem der 100 Vögel" findet sich später in mehreren Varianten auch bei indischen und arabischen Mathematikern. (s. Tropfke J.: Geschichte der Elementarmathematik. Band 1. De Gruyter. Berlin 1980. S. 613ff.)

Wie solche Gleichungssysteme gelöst wurden, ist einer Aufgabe zu entnehmen, die im ***Papyrus Michigan 620*** (um 200 n.Chr.) enthalten ist. Sie lautet (frei übersetzt):

Verteile 9900 Drachmen unter vier Personen so, dass die zweite Person um ${}^{1}/_{7}$ mehr erhält als die erste, die dritte um 300 Drachmen mehr als die erste und zweite Person zusammen und die vierte Person um 300 Drachmen mehr als die erste, zweite und dritte Person zusammen.

Bezeichnet man die vier Zahlen mit *x,y,z,u,* so erhält man das Gleichungssystem:

$x + y + z + u = 9900$

$y = x + {}^{x}/_{7}$

$z = x + y + 300$

$u = x + y + z + 300$

Nach der Aufgabenstellung folgen im Originaltext die Lösungen $x = 1050$, $y = 1200$, $z = 2550$, $u = 5100$ und die Probe. Schließlich folgt noch eine rein algebraische Ausrechnung. Dabei kommt der Rechner mit dem Symbol ς für eine Unbekannte aus. Er setzt

$x = 7\varsigma$.

Dann ist

$y = 8\varsigma$

$z = 15\varsigma + 300$

$u = 30\varsigma + 600$

und

$x + y + z + u = 60\varsigma + 900 = 9900$

Das steht in den ersten beiden Zeilen des folgenden Schemas, in dem noch zwei weitere Zeichen benutzt werden, die mit *dr* für *Drachme* und = für γινεται („macht") wiedergegeben werden:

	${}^{1}/_{7}$	*dr* 300	*dr* 300	*dr* 9900	
ς7	ς8	ς15	*dr* 300	*dr* 600	
			ς30	=ς60	*dr* 900
				150	
1050	=1200	2550	5100	9900	
150					

Aus $60\varsigma + 900 = 9900$ ergibt sich $\varsigma = 150$. Das steht in der vierten Zeile. Daraus sind dann in der fünften Zeile die vier gesuchten Zahlen berechnet.

Ein einheitliches Lösungsschema für lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten entwickelte sich aber erst im 16. Jahrhundert, als auch negative Zahlen und die Null als Lösungen anerkannt wurden.

Die Tradition der Aufgaben in Text 7 (Text 8)

Alle Aufgaben von TEXT 7 stehen in der Tradition von Problemen der Unterhaltungsmathematik die sich oft auch in entsprechenden ägyptischen, babylonischen, griechischen, byzantinischen, chinesischen, indischen, arabischen und abendländischen Sammlungen des Mittelalters und der Neuzeit in gleicher oder leicht veränderter Einkleidung wiederfinden

(vgl.: Folkerts, M.: *Die älteste mathematische Aufgabensammlung in lat. Sprache: Die Alkuin zugeschriebenen Propositiones ad acuendos iuvenes*. Wien 1977. (=Österr.Ak.der Wissenschaften, math.-naturwiss.Kl.Denkschriften. Bd. 116. Abh.6). S. 35–41.)

Die Aufgabe 8 (*de cupa)* von TEXT 7 kommt erstmals in etwas geänderter Form in dem bereits vorher (S. 80) erwähnten chinesischen Rechenbuch ***Chiu Chang Suan Shu*** vor:

„Jetzt hat man einen Teich, 5 Kanäle führen ihm Wasser zu. Öffnet man von ihnen 1 Kanal, dann bekommt man in $^{1}/_{3}$ Tag 1 Füllung, beim nächsten in 1 Tag 1 Füllung, beim nächsten in 2 ½ Tagen 1 Füllung, beim nächsten in 3 Tagen 1 Füllung und beim nächsten in 5 Tagen 1 Füllung. Jetzt öffnet man sie alle gleichzeitig. Frage: In wieviel Tagen füllen sie den Teich? Die Antwort sagt: In $^{15}/_{74}$ Tagen."

In der ***Anthologia Graeca*** (Buch XIV) lautet die Aufgabe 7:

„Bin ein Löwe aus Erz. [...] Aus den Augen, aus Mund und der Sohle unter dem rechten Fuß springen Fontänen hervor. Dass das Becken sich füllt, braucht rechts das Auge zwei Tage, links das Auge drei und meine Fußsohle vier. Doch meinem Munde genügen sechs Stunden. Wie lange wohl dauert's, wenn sich alles vereint, Augen und Sohle und Mund."

In der Folge tritt dieser Aufgabentyp auf bei den Indern, bei den Arabern, in Byzanz, sowie in abendländischen Rechenbüchern vom 12. Jahrhundert bis auf den heutigen Tag.

(vgl. Tropfke J.:*Geschichte der Elementarmath*. Bd.1.1980. S.578f.)

Besonders interessant sind in diesem Zusammenhang die Aufgaben von TEXT 7, die sich auf römische Quellen zurückführen lassen. Dazu zählen neben den Aufgaben der rechnenden Geometrie die Erbschaftsprobleme, allen voran die Aufgabe 35, die erstmals in römischen Rechtsverordnungen erscheint, so bei dem in der Zeit Hadrians (117–138) lebenden Juristen **Salvius Iulianus**, der sich dabei auf **Iuventius Celsus** *(de institutione uxoris et postumi et postumae* ca. 100 n.Chr.) beruft. Der Text lautet (***digestae*** XXVIII Tit.2 *de liberis et postumis etc*. c.13):

Si ita scriptum sit: ‚si filius mihi natus fuerit, ex besse heres esto: ex reliqua parte uxor mea heres esto. Si vero filia mihi nata fuerit, ex triente heres esto: ex reliqua parte uxor heres esto', et filius et filia nati essent, dicendum est assem distribuendum esse in septem partes, ut ex his filius quattuor, uxor duas, filia unam partem habeat: ita enim secundum voluntatem testantis filius altero tanto amplius habebit quam uxor, item uxor altero tanto quam filia: licet enim subtili iuris regulae conveniebat ruptum fieri testamentum, attamen cum ex utroque nato testator voluerit uxorem aliquid habere, ideo ad huiusmodi sententiam humanitate suggerente decursum est.

Wenn der Erblasser so schrieb: ‚Wenn mir ein Sohn geboren wird, so soll dieser auf zwei Drittel meines Vermögens, meine Frau aber auf den übrigen Teil Erbe sein; wird mir aber eine Tochter geboren, so soll diese auf ein Drittel, auf das Übrige aber meine Frau Erbe sein', und ihm nun ein Sohn und eine Tochter geboren wurden, so muss man das Ganze in sieben Teile teilen, so dass von diesen der Sohn vier, die Frau zwei und die Tochter einen Teil erhält. Denn auf diese Weise wird nach dem Willen des Erblassers der Sohn noch einmal soviel erhalten wie die Frau, und die Frau noch einmal soviel wie die Tochter. Denn obgleich nach den feinen Bestimmungen des Rechts ein solches Testament umgestoßen werden sollte, so verfiel man doch aus rein vernünftigen Gründen auf die genannte Entscheidung, da ja doch nach dem Willen des Erblassers immer die Frau etwas erhalten soll, mag ihm ein Sohn oder eine Tochter geboren werden.

Vom mathematischen Gehalt her ist diese Aufgabengruppe eng verwandt mit den Gesellschaftsrechnungen, und unter diesem Kapitel erscheint die Zwillingserbschaft auch häufig in den Rechenbüchern. Weitere Varianten sprechen von der Geburt von Drillingen; sogar der absurde Fall, dass 1 Sohn, 1 Tochter und 1 Hermaphrodit geboren wird, ist einem Aufgabenfabrikanten eingefallen. Bei manchen Autoren werden vom Vater auch andere Anordnungen wie S(ohn) : M(utter) = 2 : 1 und M(utter) : T(ochter) = 2 = 1 getroffen.

(Für weitere Aufgabentypen der Unterhaltungsmathematik s. Tropfke Johannes: *Geschichte der Elementarmathematik*. Band 1. Berlin 1980. S. 514 ff.)

TEXT 8 De arithmeticis propositionibus

Dieser Text, der zu den interessantesten mathematischen Texten des Frühmittelalters zählt, besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil (Probleme 1–3) dürfte im 8 Jahrhundert in Westdeutschland bzw. Ostfrankreich entstanden sein, während der zweite Teil (Problem 4) im 9. Jahrhundert hinzugefügt wurde. Zu diesem Ergebnis kommt Menso Folkerts auf Grund intensiver handschriftlicher Untersuchungen; ihm verdanken wir auch die bisher einzige textkritische Ausgabe dieses Textes (Sudhoffs Archiv 56 (1972) S. 22–43). Die früher erfolgten Drucke behandeln den Text als Teil des *Beda*-Corpus. Inhaltlich und von der Überlieferung her ist diese Zuweisung durch nichts zu stützen: Weder erwähnt **Beda** die Schrift in der Liste der von ihm verfassten Werke, noch wird der Text in irgendeiner Handschrift *Beda* zugeschrieben. Sofern in den Codices eine *inscriptio* vorhanden ist, lautet diese übereinstimmend: *Incipiunt numeri, per quos potest qui voluerit alterius cogitationes de numero quolibet, quem animo conceperit, explorare*; sie gibt also den Inhalt an, ohne auf den Verfasser hinzuweisen. Vermutlich wurde die Schrift nur deshalb in das ***Corpus Bedanum*** aufgenommen, weil sie in den den Drucken zugrunde liegenden Handschriften mit *Beda*-Werken zusammen überliefert wurde. Auch die Überschrift *De arithmeticis propositionibus* ist eine Erfindung der Herausgeber und wird nur der Tradition wegen beibehalten

Vom Inhalt her verdient das Werk besondere Beachtung: Von den vier Teilen geben die ersten drei verschiedene Methoden an, um Zahlen zu erraten. Allem Anschein nach treten die hier geschilderten Verfahren zumindest in Westeuropa zuerst in diesem Werk auf. Seitdem sind sie zum festen Bestandteil der Unterhaltungsmathematik geworden: Während des Mittelalters und in der beginnenden Neuzeit begegnen wir ihnen immer wieder. Der 4. Abschnitt unserer Schrift gibt Anweisungen über die Addition positiver und negativer Zahlen. Dieser Text ist in der westeuropäischen Mathematik vor dem 15. Jahrhundert ohne Beispiel; vergleichbare Rechenregeln mit negativen Zahlen sind vor dieser Zeit nur aus indischen und chinesischen Quellen bekannt

INCIPIUNT NUMERI, PER QUOS POTEST QUI VOLUERIT ALTERIUS COGITATIONES DE NUMERO QUOLIBET, QUEM ANIMO CONCEPERIT, EXPLORARE

Es folgen Regeln, durch die, wer will, die Gedanken eines anderen an eine bestimmte Zahl, die er sich im Geist gemerkt hat, erraten kann

(1) Quomodo numerus a quolibet animo conceptus, quis sit, possit agnosci. Assumatur numerus quilibet ac triplicetur. Triplicatus dividatur in duas partes, et si ambae aequales extiterint, qualem volueris absque ulla differentia iterum triplicabis. Quodsi inaequales fuerint, quae maior fuerit triplicetur, quotiesque in ea, postquam triplicata fuerit, VIIII inveniri possint, consideretur; quia quoties VIIII habuerit, toties duo sumendi sunt. Observandum est autem, ut, postquam numerus triplicatus et divisus est iterumque medietas fuerit triplicata et de novenario fuerit interrogatum, hoc etiam adiungatur, si aliquid supra unum vel duos vel quot fuerint novenarios remansisset. Quia si aliquid remansit, sex fuerunt et de his unus sumendus est; si nihil remansisse responderit, nihil sumendum est. Hisque in summam redactis pronuntiandus numerus, qui primus fuerat mente conceptus. Ut verbi gratia: Si unum fuerit mente conceptum et triplicatum, tres efficiuntur, qui divisi in duos et unum resolvuntur. Duo vero, qui huius divisionis maiorem obtinent portionem, iterum triplicati VI tantum efficiunt, nec remanet aliquid. Unum ergo fuit, quod prius mente conceptum est. Item si duo fuerint animo concepti, cum triplicabuntur, VI faciunt; sex divisi in tres, et tres resolvuntur. Tres vero triplicati VIIII tantum efficiunt, nec remanet aliquid. Ergo duo fuerunt, qui prius mente comprehensi sunt. Et ideo in omni huius supputationis ratione novenarius duos semper significat et senarius unum; sciendumque, quod omnis impar numerus, qui assumptus fuerit et ordine quo praedictum est triplicatus atque divisus, in senarium terminatur, par vero numerus in novenarium, quia unitas secundum supradictum modum triplicata atque divisa senarium procreat, binarius vero simili modo triplicatus atque divisus novenarium, quia hi duo numeri, id est unus et duo, paritatis et imparitatis dicuntur esse principia.

Wie eine Zahl, die sich eine beliebige Person vorgestellt hat, welche es auch sein mag, erraten werden kann. Es soll eine beliebige Zahl genommen und verdreifacht werden. Das Dreifache soll in zwei Hälften geteilt werden, und wenn beide Hälften gleich groß sind, sollst du eine, welche du auch willst, ohne Unterschied wiederum mit 3 multiplizieren. Wenn die Teile aber ungleich sind, so soll der Teil verdreifacht werden, der der größere ist. Nun soll man überlegen, wie oft in diesem Dreifachen die Zahl 9 enthalten ist. Denn wie oft 9 enthalten ist, ebenso oft muss man die Zahl 2 nehmen. Man muss aber beachten, dass, nachdem die Zahl verdreifacht und geteilt wurde, und die Hälfte wiederum verdreifacht wurde und man nach dem Vielfachen von 9 gefragt hat, noch hinzugefügt wird, wenn etwas über das Ein- oder Zwei- oder Wieviel auch immer Fache von 9 hinaus übriggeblieben ist. Denn wenn etwas übrig geblieben ist, so war es 6 und davon ist 1 zu nehmen; wenn man antwortet, dass nichts übrig geblieben ist, ist nichts zu nehmen. Sobald man diese Einzelwerte zu einer Summe verbunden hat, kann man die Zahl verkünden, die zuerst im Geist festgehalten wurde. Wie zum Beispiel: Wenn 1 im Geist festgehalten und verdreifacht wurde, so ergibt sich 3, das in 2 und 1 geteilt wird. 2 aber, das bei dieser Teilung den größeren Teil bildet, ergibt wiederum verdreifacht 6, und nichts bleibt übrig. Daher war es die Zahl 1, die zuerst im Geist festgehalten wurde. Ebenso wenn man sich 2 im Geist gedacht hat, so ergibt es verdreifacht 6. 6 wird in 3 und 3 geteilt. 3 ergibt aber verdreifacht 9 und kein Rest bleibt. Deshalb war 2 die Zahl, die man zuerst im Geist festgehalten hat. Und deshalb bezeichnet in jeder Rechnung dieser Art das Vielfache von 9 immer das Vielfache von 2 und der Rest 6 die Zahl 1. Man muss wissen, dass jede ungerade Zahl, die genommen und auf die vorhin angegebene Weise verdreifacht und geteilt wurde, mit dem Rest 6 endet, eine gerade Zahl aber in einem Vielfachen von 9, weil die Eins auf vorhin genannte Weise verdreifacht und geteilt 6 ergibt, die Zwei aber auf gleiche Art verdreifacht und geteilt 9. Diese zwei Zahlen – nämlich 1 und 2 – sind, wie man sagt, die Ursprünge aller geraden und ungeraden Zahlen.

(2) ITEM ALITER

Assumatur numerus quilibet ac triplicetur. Triplicatus dividatur in duas partes, et tunc ille, qui numerum mente concepit, interrogetur, si ipsius numeri sit aequa divisio. Quodsi pares ambas esse partes responderit, nihil sumatur; si autem impares esse dixerit, unum sumatur in hac prima divisione ad memoriam divinantis, atque iterum una pars divisionis, quando ambae aequales fuerint, absque differentia triplicetur. Si vero impares fuerint, maior pars triplicanda est atque dividenda, sicut superius, in duas partes iterumque interrogandum, si aequalis aut inaequalis sit facta divisio. Et si aequalis quidem facta est, nihil sumendum est, si autem inaequalis, duo sumendi sunt in secunda divisione. Et in medietate divisionis si aequalis fuit, absque ulla partium differentia, quot novenarii contineantur, interrogandum. Quodsi inaequalis fuit, in maiori parte quaerendum est, quia quot novenarii in ea inveniuntur, tot quaternos divinator sumere debet. Ut verbi gratia: si sex fuerint mente concepti, cum triplicati fuerint, XVIII faciunt; XVIII divisi in VIIII et VIIII partiuntur, et quia aequalis est divisio, nihil ibi sumendum est. Novem iterum, quae est medietas huius divisionis, triplicati faciunt XXVII. Qui XXVII divisi in XIII et XIIII resolvuntur, et quia ista est secunda divisio et inaequalis, duo sumendi sunt. Tum in maiori parte ipsius divisionis, hoc est in XIIII, quaerendum est, quoties VIIII possint inveniri. In XIIII semel VIIII sunt. De his VIIII IIII a divinante colligendi sunt, qui duobus, qui in secunda divisione collecti sunt, adiuncti VI faciunt. Senarius ergo numerus primus mente comprehensus est. Et hoc in hac ratione notandum est, quod, si ambae divisiones paritati responderint, nihil ex his sumendum est. Si vero prima impar fuerit, unus sumendus est; si secunda, duo sumendi sunt. Novenarius vero quaternarii significationem continet. Quod ideo in hac supputatione aliter quam in superiori accidere videtur, quia haec bis triplicatur et bis dividitur, illa vero bis triplicatur et semel dividitur. Quapropter in hac novenarius quaternarium, in illa vero binarium significat.

Ebenso ein anderes Beispiel

Es wird eine beliebige Zahl genommen und verdreifacht. Das Dreifache soll in zwei Teile geteilt werden, und dann soll jener, der sich die Zahl in seinem Gedächtnis vorgestellt hat, gefragt werden, ob es eine ausgewogene Teilung dieser Zahl gebe. Wenn er antwortet, dass beide Teile dieser Zahl gleich groß sind, so soll nichts behalten werden. Wenn er aber sagt, dass dieselben ungleich sind, dann soll der Ratende bei dieser ersten Teilung die Zahl 1 im Gedächtnis festhalten. Wenn beide Teile gleich sind, soll ein Teil ein zweites Mal ohne Unterschied verdreifacht werden. Sollten sie aber ungleich sein, so muss der größere Teil verdreifacht und, wie vorher, in zwei Teile geteilt werden. Und wiederum ist zu fragen, ob die Teilung ausgewogen oder unausgewogen verlief. Und wenn sie ausgewogen verlief, so muss man sich nichts merken. Wenn sie aber unausgewogen war, so muss man sich bei dieser zweiten Teilung die Zahl 2 merken. Und wenn die Teilung ausgewogen war ohne jeden Unterschied der Teile, soll man fragen, wie oft die Zahl 9 in einer Hälfte enthalten ist. Wenn die Teilung aber unausgewogen ist, muss man fragen, wie oft 9 im größeren Teil enthalten ist; denn wie oft die Zahl 9 in dem Teil enthalten ist, ebenso oft muss sich der Ratende die Zahl 4 merken. Wie zum Beispiel: Wenn man sich die Zahl 6 im Geist gemerkt hat, so ergibt 6 verdreifacht 18. 18 wird in 9 und 9 geteilt, und weil diese Teilung ausgewogen ist, muss man sich in diesem Falle nichts merken. Die Zahl 9 wiederum, die die Hälfte dieser Teilung ist, ergibt verdreifacht 27. 27 wird in 13 und 14 geteilt, und weil diese zweite Teilung unausgewogen ist, muss man sich 2 merken; dann muss man fragen, wie oft 9 im größeren Teil, das heißt in 14, entdeckt werden kann. In 14 ist 9 einmal enthalten. Von diesen 9 muss vom Ratenden die Zahl 4 festgehalten werden, die mit 2, das bei der zweiten Teilung festgehalten wurde, addiert 6 ergibt. Die Zahl 6 hat man sich zu Beginn im Geist gemerkt. Und Folgendes muss man sich bei dieser Rechnung merken: Wenn beide Teilungen ausgewogen sind, so muss man sich dabei nichts merken. Wenn die erste Teilung unausgewogen ist, muss man sich 1 merken, wenn die zweite Teilung unausgewogen ist, dann 2. Das Vielfache von 9 bezeichnet aber auch das Vielfache von 4. Dies scheint daher in dieser Rechnung anders zu funktionieren als in der vorigen: In dieser wird eine Zahl zweimal verdreifacht und zweimal geteilt, in jener aber zweimal verdreifacht und einmal geteilt. Deshalb bezeichnet in dieser Rechnung das Vielfache von 9 das Vielfache von 4, in jener aber das Vielfache von 2.

(3) ITEM ALITER

Quomodo divinandum sit, qua feria septimanae quilibet homo rem quamlibet fecisset. Quemcumque numerum cuiuslibet feriae nomen continentem animo conceperit, primo debet duplicare, deinde illi numero duplicato quinque adiungere ipsamque summam, quae de his collecta est, quinquies multiplicare, deinde totum decies ducere, post haec ex toto ducentos L tollere et hoc, quod remanet, pro feriae numero tenere. Ut verbi gratia: si de prima feria ratio habeatur, unum duplicetur, fiunt duo; his V adiungantur, fiunt VII,

Ebenso ein anderes Beispiel

Wie man raten muss, an welchem Wochentag ein beliebiger Mensch eine beliebige Sache verrichtet hat. Jeder, der die Zahl, die auch den Namen jedes beliebigen Wochentages beinhaltet, im Geist erfasst hat, muss jene zuerst verdoppeln, sodann jener verdoppelten Zahl 5 hinzufügen, diese Summe, die daraus gebildet wurde, mit 5 multiplizieren und hierauf das Ganze zehnmal rechnen, zuletzt vom Ganzen 250 subtrahieren und das, was übrig bleibt, für die Zahl des Wochentages halten. Wie zum Beispiel: Wenn mit dem ersten Wochentag gerechnet wird, 1 verdoppelt ergibt 2; diesem 5 hinzugefügt, ergibt 7;

qui VII quinquies multiplicati fiunt XXXV; qui XXXV decies ducti fiunt CCCL. De quibus si CCL tollantur, remanent C, qui pro monade, id est uno, qui primam feriam significat, sumendi sunt. Hoc quoque in ista supputatione servandum est, ut semper CCL de totius summae collectione auferantur et quot centenarii remanserint diligenter consideretur, quia, sicut supradictum est, semel centeni primam feriam significant, bis centeni secundam, ter centeni tertiam, quater centeni quartam, quinquies centeni quintam, sexies centeni sextam, septies centeni septimam.

diese 7 mit 5 multipliziert, ergibt 35; diese 35 zehnmal gerechnet ergeben 350. Wenn davon 250 subtrahiert werden, so bleibt 100 übrig, das für die Einheit, das heißt für 1, das den ersten Wochentag bezeichnet, zu nehmen ist. Auch bei dieser Rechnung muss beachtet werden, dass immer 250 von der Gesamtsumme subtrahiert wird und sorgfältig geprüft wird, ein Wievielfaches von 100 übrig geblieben ist, weil, wie vorhin gesagt wurde, einmal 100 den ersten Wochentag bezeichnet, zweimal 100 den zweiten, dreimal 100 den dritten, viermal 100 den vierten, fünfmal 100 den fünften, sechsmal hundert den sechsten, siebenmal 100 den siebenten.

(4) ITEM

Verum cum vero facit verum. Minus cum vero facit verum. Verum cum minus facit minus. Minus cum minus facit minus. Verum essentiam, minus nihil significat. Pone summam numeri quam volueris in veri, hoc est essentiae, nomine, et pone aliam summam cuius volueris numeri in adverbii, quod minus dicitur, nomine, quod nihil significare dixi, et confer illas duas summas. Quae maior fuerit, vincit minorem et consumit eam iuxta quantitatem magnitudinis suae. Ut verbi gratia: si iungantur duae summae numerorum, una, quae veri nomine, id est essentiae, appellata sit, ut sunt VII, alia, quae minus adverbii nomine vocetur, ut sunt III, hae duae summae numerorum sibi collatae, hoc est essentis et non essentis, quia maior est summa veri quam illius, quae dicitur minus, sicut plus sunt VII quam III, vincit numerum VII verum minus, sed non maiori parte quam vincere potest hoc IIII; valet enim III minus, et VII remanent IIII. Similiter si iungantur III veri nomine et VII minus, quia maior est nihili quam essentiae summa, vincit septenarius non existens ternarium existentem et consumit eum sua non essentia, et remanent de ipso sibi IIII numeri non existentes; et hoc est quod dicitur: iunge III et VII minus, faciunt IIII minus. Si autem III non existentes simul et VII similiter non existentes numeros iunxeris, decem non esse monstrabis. Sicut enim duo veri, hoc est existentes, numeri, ut sunt VII et III, verum, id est existentem, numerum efficiunt, hoc est denarium, sic duo non existentes numerorum summae denominatae, ut sunt III minus et VII minus, X minus faciunt. Valet enim verum efficere et minus non efficere. Iunge III et VII, fiunt X; iterum iunge III minus et VII, fiunt IIII; iunge III et VII minus, fiunt IIII minus; iunge III minus et VII minus, fiunt X minus.

Ebenso ein anderer Lehrsatz

Positiv mit positiv ergibt positiv. Negativ mit positiv ergibt positiv. Positiv mit negativ ergibt negativ. Negativ mit negativ ergibt negativ. Positiv beinhaltet Existenz, negativ nicht. Nimm den Wert einer beliebigen positiven, das heißt existierenden Zahl und nimm den unterschiedlichen Wert einer beliebigen Zahl mit der Beifügung *minus*, eine Bezeichnung, die, wie ich sagte, die Nichtexistenz beinhaltet, und stelle jene beiden Werte gegenüber. Der größere Wert übertrifft den kleineren und verkleinert ihn entsprechend der Größe seines Wertes. Wie zum Beispiel: Wenn die Werte zweier Zahlen addiert werden, von denen die eine positiv, das heißt existierend ist, wie etwa 7, die andere mit der Beifügung *minus*, wie etwa 3, so werden die Werte dieser zwei Zahlen einander gegenübergestellt, das heißt der der existierenden und der der nicht existierenden. Weil der Wert der positiven Zahl größer ist als der der sogenannten negativen Zahl – weil die Zahl 7 einen größeren Wert hat als die Zahl 3 –, verringert das Minus die positive Zahl 7, kann sie aber nur bis zum Ergebnis 4 verringern; denn das Minus hat nur den Wert 3, und von 7 bleibt 4 übrig. Addiere minus 3 und 7, so bleibt 4. Ähnlich ist es, wenn die positive Zahl 3 und minus 7 addiert werden; weil der Wert der nicht existierenden Zahl größer ist als der der existierenden, verringert die nicht existierende Zahl 7 den Wert der existierenden Zahl 3 und bringt sie mit ihrer Nichtexistenz zum Verschwinden, und es bleibt von ihr die nicht existierende Zahl 4 übrig; das heißt sozusagen, addiere 3 und minus 7, das ergibt minus 4. Wenn du aber die nicht existente Zahl 3 und die gleichfalls nicht existente Zahl 7 addierst, wirst du zeigen, dass das Ergebnis nicht 10 ist. Denn wie zwei positive, das heißt existierende Zahlen, wie es 7 und 3 sind, ein positives, das heißt existierendes Ergebnis bewirken, nämlich 10, so ergeben die genannten Werte der zwei nicht existierenden Zahlen, nämlich minus 3 und minus 7, minus 10. Denn positive Zahlen können ein positives Ergebnis bewirken, negative nicht. Addiere 3 und 7, so entsteht 10; addiere ferner minus 3 und 7, so entsteht 4, addiere 3 und minus 7, so entsteht minus 4; addiere minus 3 und minus 7, so entsteht minus 10.

Typen antiker Mathematikrätsel

Das unterhaltsame Gesellschaftsspiel, gedachte Zahlen oder auch die Verteilung von Gegenständen zu erraten, stammt aus dem Orient. Von dort werden diese Aufgaben von Byzanz und vom Abendland übernommen. Diese Probleme dienten der Entwicklung und Verbreitung algebraischer und zahlentheoretischer Kenntnisse und waren in den Klosterkreisen im Mittelalter sehr beliebt. Im Folgenden seien die bekanntesten und am häufigsten vorkommenden Typen von Zahlenrätseln genannt.

a. *Rückwärts rechnen*

Dieses recht einfache Verfahren besteht darin, dass man den Befragten eine Reihe von Rechenoperationen vornehmen lässt und dann vom Ergebnis her die inversen Operationen durchführt. Ein Beispiel dafür ist die folgende Aufgabe aus einer byzantinischen Sammlung aus dem 15. Jahrhundert:

(H. Hunger/K. Vogel*: Ein Byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts. 100 Aufgaben aus dem Codex Vindobonensis Phil. Gr. 65.* Text, Übers. u. Komm. Wien 1963. (= Österr. Akad.d.Wiss., phil.-hist.Kl.Denkschriften. Bd. 78, Abh.2.) S56 f.)

Darüber, wie du eine Zahl findest, die du mit 12 multiplizierst und dann durch 36 teilst, und dass als Ergebnis 64 herauskommt. Mache es so: Multipliziere die 36 mit den 64, und es ergibt sich 2304, und so groß ist die Zahl, die du durch 36 teilst, damit der Quotient 64 herauskommt. Wiederum sagst du, dass du durch die 12 teilst. Jetzt teile die 2304 durch die 12, und es kommen heraus 192, und so groß wird die Zahl selbst sein, damit du sie mit 12 multiplizierst und dann durch 36 teilst, und dass als Quotient 64 herauskommt.

b. *Erraten mit 9*

Die Probleme 1 und 2 des vorliegenden Textes sind die frühesten Belege für derartige Aufgaben im Abendland. Im ersten Problem lässt man sich die gedachte Zahl x verdreifachen und diesen Wert halbieren; ergibt sich ein Rest, so erhöht man auf die nächste ganze Zahl. Das Zwischenergebnis wird verdreifacht. Man lässt sich mitteilen, wie viele Neuner n in diesem Produkt enthalten sind und ob die Division durch 9 aufgeht. Bleibt kein Rest, so ist $2n$ die gesuchte Zahl; bleibt der Rest 6, so war $2n + 1$ gedacht.
Die Richtigkeit des Verfahrens in beiden Fällen (gerades und ungerades x) ist evident:
i) $x = 2n$: Man bilde $2n$, $2n \,.\, 3$, $6n : 2$, $3n \,.\, 3$, $9n : 9 = n$ (Rest 0), also $2n = x$
ii) $x = 2n + 1$: Man bilde $2n + 1$, $(2n + 1) \,.\, 3$, $(6n + 3) : 2 + ½$ (erhöht), $(3n + 2) \,.\, 3$, $(9n + 6) : 9 = n$ (Rest 6), also $2n +1 = x$.
Beim zweiten Problem wird das in Problem 1 dargestellte Verfahren dadurch erschwert, dass jetzt im Anschluss an die zweite Multiplikation mit 3 noch einmal halbiert wird. Nach jeder Halbierung fragt man, ob ein Rest entsteht. Wird dies bejaht, so muss der Rechner das Zwischenergebnis auf die nächste ganze Zahl erhöhen, und der Rater merkt sich 1, falls sich bei der 1. Division der Rest 1 ergibt; er merkt sich 2, falls dies bei der zweiten Division der Fall ist. Man lässt sich wieder die Zahl der Neuner n mitteilen, bildet $4n$ und addiert die gemerkten Zahlen. Die Summe ist das gesuchte x.
i) $x = 4n$: Reihe $4n$, $12n$, $6n$ (0 merken), $18n$, $9n$ (0 merken) n (Rest 0), also $4n + 0 + 0 = x$
ii) $x = 4n + 1$: Reihe $4n + 1$, $12n + 3$, $6n + 2$ (1 merken), $18n + 6$, $9n + 3$ (0 merken), n (Rest 3), also $4n + 1 = x$
iii) $x = 4n + 2$: Reihe $4n + 2$, $12n + 6$, $6n + 3$ (0 merken), $18n + 9$, $9n + 5$ (2 merken), n (Rest 5), also $4n + 0 + 2 = x$
iv) $x = 4n + 3$: Reihe $4n + 3$, $12n + 9$, $6n + 5$ (1 merken), $18n + 15$, $9n + 8$ (2 merken), n (Rest 8), also $4n + 1 + 2 = x$

c. *Gerad oder Ungerad*

Bei diesen erst in Handschriften des Mittelalters auftretenden Problemen soll erraten werden, in welcher Hand des Befragten sich eine gerade oder ungerade Zahl, 2n oder 2n+1, befindet. Ein derartiges Beispiel steht u.a. bei **C. Rudolff** (*Künstliche rechnung mit der Ziffer vnd mit den zal pfenningen sampt der Wellischen Practica.* Wien 1526. r 4^r):
Von gerad vnd vngerad. Einer hat etlich pfennig in der rechten / auch etlich in der lincken / ist in der eynen hand gerad / in der andern vngerad. Das zu wissen / heiß ihne die zal der pfennig in der rechten dupliren / vnd die pfenning in der lincken handt zum product addirn / wirdt daraus ein gerade zal / so ist in der rechten vngerad / wirdt ein vngerade zal / so ist in der rechten gerad.
Es sind also die beiden Fälle zu unterscheiden:
i) Liegt rechts ungerade 2n+1 und links gerade 2n, so folgt durch Multiplikation der Zahl in der rechten Hand mit 2 und Addition der in der linken Hand:
$$(2n+1).2 + 2n = 2n+2+2n = \text{gerade}$$
ii) Liegt rechts gerade 2n und links ungerade 2n+1, so folgt durch Multiplikation der Zahl in der rechten Hand mit 2 und Addition der in der linken Hand:

2n.2 + 2n+1 = 4n + 2n+1 = ungerade.

d. *Wo ist der Ring?*

Hier handelt es sich darum, wie nummerierte Gegenstände (Würfelaugen, Wochentage usw.) verteilt sind oder wo (an welchem Finger, an welcher Hand, bei welcher Person) sich ein Ring befindet. Dabei müssen die Zahlen kleiner als 10 sein, sie werden durch Operationen mit 2, 5 und 10 auf die Dezimalstellen gezwungen. Der einfachste Fall liegt im Problem 3 des obigen Textes vor. Hier geht es darum, einen Wochentag zu erraten. Ist *x* die Zahl des Tages, so lässt man nacheinander den Ausdruck $(2x + 5) \cdot 5 \cdot 10$ bilden und sich das Ergebnis nennen. Subtrahiert man 250, so gibt die Zahl der Hunderter das gesuchte *x* an.

Das Verfahren beruht auf der Identität $\frac{(2x+5).5.10-250}{100} = x$

Im komplizierteren Fall sind x,y,z die zu erratenden Augen oder „Punkte", wie z.B. bei **Leonardo von Pisa** (*Scritti* Ed. Boncompagni. Bd. 1 S. 304 f.); dann lautet das Rezept:
[(x.2+5).5 + 10 + y].10 + z = 100x + 10y + z + 350.
Es braucht also nur 350 vom berechneten Ergebnis abgezogen werden und die 3 Zahlen stehen auf den 3 Stellen. Eine Variante dieses Beispiels steht im ***Algorismus Ratisbonensis*** (Nr. 271):

Wurfel. Nota des gleichen, wenn ir 3 mit einem wurfel werfen und wild wissen, wie vil ydlicher hat gewurffen, sprich zu dem ersten: duplir dy zal deiner augen, dy du geworffen hast. Darnach haijß yn addiren 5 und multiplicirn mit 5. Darnach sprich zw dem andern, daz er addir sein augen; darnach haijß multiplicirn mit 10. Darnach sprich zw dem dritten, daz er addir auch sein augen. Darnach nym von der summ 350 und waz do pleibt an der ersten stat gegen der linken hannt, daz hat der erst gewurffen.

Hier müsste eigentlich 250 subtrahiert werden.

(Für weitere Typen von Zahlenrätseln s.Tropfke Johannes: *Geschichte der Elementarmathematik.* Band 1.Berlin 1980.S.642 ff.)

Negative Zahlen (Text 9)

Negative Zahlen als Lösungen von Systemen linearer Gleichungen tauchen zum ersten Mal in dem chinesischen Rechenbuch ***Chiu Chang Suan Shu*** aus dem 1. Jahrhundert v. Chr. auf. Die Fachausdrücke sind *cheng* = aufrecht, wirklich, positiv, und *fu* = auf dem Rücken tragen, wegtragen, negativ. Wahrscheinlich wurden schon hier positive Zahlen durch rote und negative durch schwarze Rechenstäbchen dargestellt. Regeln für Addition und Subtraktion positiver und negativer Zahlen werden ausdrücklich angegeben. Aufgabe 8 lautet:

Jetzt hat man zwei Rinder und 5 Schafe verkauft und damit 13 Schweine gekauft, wobei ein Rest von 1000 Geldstücken übrigblieb. Man hat 3 Rinder und 3 Schweine verkauft und damit 9 Schafe gekauft; das Geld reichte gerade. Man hat 6 Schafe und 8 Schweine verkauft und damit 5 Rinder gekauft, aber das Geld reichte nicht um 600 Geldstücke.
In moderner Schreibweise ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x + 5y - 13z &= 1000 \\ 3x - 9y + 3z &= 0 \\ -5x + 6y + 8z &= -600 \end{aligned}$$

Der Text sagt:

Lege hin die 2 Rinder und die 5 Schafe als positiv, die 13 Schweine als negativ, die Anzahl des restlichen Geldes als positiv. Als nächstes lege hin die 3 Rinder als positiv, die 9 Schafe als negativ, die 3 Schweine als positiv. Als nächstes lege hin die 5 Rinder als negativ, die 6 Schafe als positiv, die 8 Schweine als positiv, das Geld, um das es nicht reicht, als negativ.

Als Lösung wird angegeben:

Der Preis eines Rindes ist 1200. Der Preis eines Schafes ist 500. Der Preis eines Schweines ist 300.

Bei den Indern bedeuten die Fachwörter *dhana* und *rna* ursprünglich Vermögen und Schulden, sie werden jedoch ganz abstrakt für Positives und Negatives gebraucht. Die Rechenregeln für diese Größen gibt **Brahmagupta** (599 – ~ 665 n.Chr.) an. Er sagt auch:

Das Quadrat von Negativem und Positivem ist in beiden Fällen dasselbe nämlich positiv, das von 0 ist 0. Die Wurzel hat dasjenige Vorzeichen, woraus ihr Quadrat entstanden ist.

Hiernach sind bei der Wurzel beide Vorzeichen möglich, aber anscheinend als durch die Entstehung des Quadrats bestimmt gedacht. Negative Zahlen werden durch einen darübergesetzten Punkt bezeichnet.

Bei den Arabern kommen negative Lösungen nicht vor.

Problem 4 des vorigen Textes ist das einzige bekannte Beispiel in der frühen abendländischen Mathematik, in dem Regeln für die Addition von positiven und negativen Zahlen angegeben werden. Der Terminus für „positive Zahl" lautet *verum*, der für „negative Zahl" *minus*; äquivalente Bezeichnungen sind *essentes* oder *existentes numeri* bzw. *non essentes* oder *non existentes numeri*. Nach den unklaren Anweisungen *Verum cum vero facit verum, Minus cum vero facit verum. Verum cum minus facit minus. Minus cum minus facit minus* und der Definition von *verum* und *minus* wird anhand von mehreren Beispielen angegeben, wie man eine negative und eine positive Zahl verschiedenen Betrages zusammenfügen kann. Der Text zeigt, dass hier die negativen Zahlen als selbständige Objekte behandelt werden.

Allegorische Darstellung der *geometria*. Aus: **Gregor Reisch**: *margarita philosophica*. Straßburg, 1503.

Sonst ist in dieser Zeit von negativen Zahlen nicht die Rede. Eine negative Zahl als Lösung einer Aufgabe kommt erst bei Leonardo von Pisa (~1170 – ~1240) vor. Da Beziehungen zwischen dem Autor der ***arithmeticae propositiones*** und chinesischen bzw. indischen Quellen eher auszuschließen sind, handelt es sich bei diesem Text um eine eigenständige Leistung ohne Vorbild und wohl auch ohne unmittelbare Weiterwirkung. Denn erst ein halbes Jahrtausend später setzt sich allmählich die Erkenntnis durch, dass die negativen Zahlen ein Äquivalent zu den positiven Zahlen darstellen. **Michael Stifel** (~1487–1567) nennt die negativen Zahlen *fingierte Zahlen unter Null (numeri ficti infra nihil)* und erläutert sie an folgendem Beispiel:

$$12 - 10 = 2$$
$$10 - 10 = 0$$
$$8 - 10 = 0 - 2$$

Dabei vergleicht er die negativen Zahlen mit den Brüchen, wenn er schreibt:

Wenn man über die Einheit die ganzen Zahlen setzt und unter die Einheit die Brüche, so setzt man über die Null die Einheit mit den Zahlen und unter die Null die fingierte Einheit und die fingierten Zahlen.

TEXT 9 De iugeribus metiundis

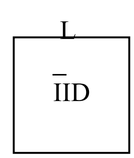
Die Schrift ***de iugeribus metiundis*** ist ein typisches Beispiel eines römischen Agrimensorentextes. Der Verfasser ist nicht bekannt. Der Text taucht zum ersten Mal im ***Codex Gudianus***, einer Sammelhandschrift des 10.Jahrhunderts n.Chr. auf. Für die späte Abfassungszeit dieses Textes sprechen folgende stilistische und inhaltliche Gründe: Die mehrmalige Verwendung des Abstraktums *hoc* statt der zu erwartenden Flexionsformen des Demonstrativpronomens, die formelhafte Verwendung von *id est*, die durch die ältesten Handschriften gesicherte Schreibweise *kastrensis* statt *castrensis*, das in klassischen Texten nicht vorkommende Flächenmaß *tabula*, sowie *pertica* als Maßeinheit der Flächenmessung statt der klassischen Einheit *pes*; all das weist diesen Text dem 5. oder 6. Jahrhundert zu. Er stellt somit ein Bindeglied zwischen den Texten der älteren Agrimensoren des 2. und 3. Jahrhunderts und den mathematischen Sammelwerken des frühen Mittelalters dar.
Der Autor von ***de iugeribus metiundis*** folgt in seiner Schrift zwei verschiedenen Quellen. Das zeigt sich unter anderem daran, dass in diesem relativ kurzen Text zwei verschiedene Näherungswerte für π verwendet werden (zuerst $\pi = 4$, dann $\pi = {}^{22}/_{7}$). Die ersten 5 Aufgaben haben eine andere Vorlage als die folgenden Probleme. Es lässt sich zeigen, dass der Verfasser von TEXT 7 in den Aufgaben 23,24,25 dieselben Rechenverfahren anwendet, wie sie auch in den ersten 5 Aufgabenstellungen dises Textes verwendet werden. Diese Formeln zur näherungsweisen Berechnung von Flächen finden sich schon im ***Papyrus Rhind***; sie stehen auch in den *mensurae* (§55) und dem *liber geeponicus* (§49) des **Heron v. Alexandria.** So grundfalsch diese Formeln auch sind, so führen sie doch für spezielle Werte zu einigermaßen brauchbaren Ergebnissen.
Um die fachlichen Qualitäten des Autors zu beurteilen, empfiehlt sich ein Vergleich dieses Textes mit ***de re rustica*** (Buch 5, cap. 2) v. **L. Iunius Columella** (1.Jh.n.Chr.). Beide Texte stimmen in Bezug auf Wortwahl und Wortstellung, ja gelegentlich sogar in den Zahlenwerten überein. Somit hat entweder der Autor dieses Textes die Schrift Columellas als Vorbild genommen oder, was wahrscheinlicher ist, beide haben aus der gleichen Quelle, vielleicht einer lateinischen Übersetzung heronischer Feldmessschriften, geschöpft. Interessant ist in diesem Zusammenhang das folgende Detail: Bei der näherungsweisen Berechnung der Fläche eines Kreissegmentes kommt bei Columella die Division 64 : 14 vor. Das Ergebnis gibt er mit *pedes quattuor semis paulo amplius* („ein wenig mehr als 4 ½ Fuß") an. Der Autor dieses Textes erhält bei derselben Aufgabe die Division 100 : 14. Bei ihm lautet das Ergebnis *perticae* VII *pes* I = = – („7 *perticae* $1\,{}^{5}/_{12}$ Fuß"). Würde man dieses Ergebnis in Dezimalzahlen umrechnen, so erhält man für 1 *pertica* = 10 *pedes* den Wert 7,1416 *perticae*: eine sehr genaue Näherung für das tatsächliche Ergebnis ~ 7,1428.. Nur ist sich der Autor nicht bewusst, dass er das Maß einer Fläche berechnet, und dafür gilt: 1 *pertica (quadrata)* = 100 *pedes (quadrati)*. Während also das Ergebnis bei **Columella** richtig ist – er rechnet nämlich alles in *pes* –, ist das Ergebnis in diesem Text falsch. Die bis auf Bruchteile genau angegebenen Lösungen beider Divisionen dürften einschlägigen Tabellen (s.TEXT 5) entnommen worden sein. Das sieht man daran, dass im weiteren Verlauf der Rechnung statt der genauen Lösungen ganzzahlige Näherungswerte verwendet werden.

Kastrensis iugerus quadratas habet perticas CCLXXXVIII, pedes autem quadratos XXVIIIDCCC, id est per latus unum perticas XVIII, quae in quattuor latera faciunt perticas LXXII. habet itaque tabula una quadratas perticas LXXII.
Si ergo fuerit ager tetragonus isopleurus habens per latus unum perticas L, ita eum metiri oportet, ut sciamus quot iugera habeat intra se. duco unum latus per aliud: fiunt perticae IID, quae faciunt iugera VIII, tabulas II, perticas LII.

Über das Ausmessen von Ackerformen

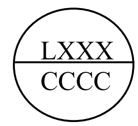
Ein quadratischer Lagerplatz mit 1 *iugerum* Fläche enthält 288 *perticae* im Quadrat, das sind 28800 Quadratfuß; das heißt, er misst an einer Seite 18 *perticae*, das macht auf allen vier Seiten 72 *perticae*. Eine *tabula* entspricht 72 *perticae* im Quadrat.

Der Acker sei viereckig mit gleich langen Seiten und messe an einer Seite 50 *perticae*; er soll so ausgemessen werden, dass wir wissen, wieviele *iugera* er enthält. Ich multipliziere eine Seite mit sich selbst: macht 2500 *perticae* (im Quadrat), das sind 8 *iugera*, 2 *tabulae* und 52 *perticae* (im Quadrat).



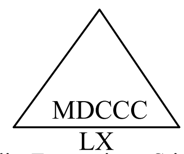
Ager si fuerit in rotundo habens per gyrum perticas LXXX, sumpta quarta parte, id est XX, multiplicas in se: et fiunt CCCC perticae. sumis CCLXXXVIII, quod est iugerum: remanent perticae CXII, quae faciunt tabulam unam semis et perticas IIII.

Der Acker sei kreisförmig und messe im Durchmesser 80 *perticae*; multipliziere den vierten Teil davon, das heißt 20, mit sich: macht 400 *perticae* im Quadrat. Nimm 288 *perticae*, das sind 1 *iugerum*, weg: es bleiben 112 *perticae* übrig, das sind 1½ *tabulae* und 4 *perticae*.



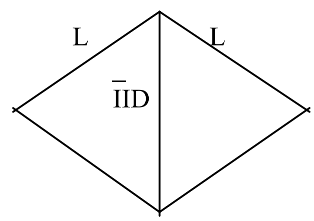
Ager si fuerit trigonus isopleurus habens tria latera, per quae sexagenas perticas habeat, duco unum latus per alterius lateris medietatem, is est LX per XXX: fiunt perticae MDCCC, quae faciunt iugera VI et tabulam unam.

Der Acker habe die Form eines gleichseitigen Dreiecks und messe auf jeder Seite 60 *perticae*. Ich multipliziere eine Seite mit der Hälfte der anderen Seite, das heißt 60 mit 30: macht 1800 *perticae*, das sind 6 *iugera* und 1 *tabula*.



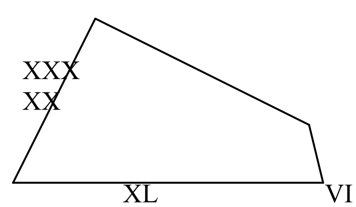
Ager si caput bubulum fuerit, id est duo trigona isopleura iuncta habentia per latus unum perticas L, unius trigoni latus in alterius trigoni latus duco, id est L per L: fiunt IID, quod sunt iugera VIII, tabulae IIς, perticae XVI.

Der Acker habe die Form eines Stierkopfes, das heißt, er bestehe aus zwei miteinander verbundenen gleichseitigen Dreiecken, von denen jedes eine Seitenlänge von 50 *perticae* hat. Ich multipliziere die Seitenlänge eines Dreiecks mit der Seitenlänge des anderen Dreiecks, das heißt 50 mit 50: macht 2500, das sind 8 *iugera*, 2½ *tabulae* und 15 *perticae*.



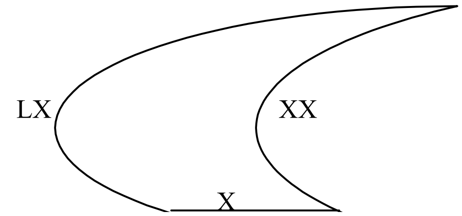
Ager si fuerit inaequalis ita ut habeat in latere uno perticas XL et in alio XXX et in alio XX et in alio VI, coniungo XL et XXX: fiunt LXX. divido in aequa: fit una pars XXXV. rursus iungo VI cum XX: fiunt XXVI. divido aequaliter: fiunt XIII. duco latus, quod divisi prius, id est XXXV per XIII: fiunt perticae CCCCLV, quae faciunt iugerum unum, tabulas II, perticas XXIII.

Der Acker habe die Form eines unregelmäßigen Vierecks und messe an einer Seite 40 *perticae*, an der gegenüberliegenden Seite 30, an der dritten Seite 20 und an der vierten Seite 6 *perticae*; ich addiere 40 und 30: macht 70. Ich halbiere das Ergebnis: macht 35. Weiters addiere ich 6 und 20: macht 26. Ich halbiere wiederum: ergibt 13. Ich multipliziere das Ergebnis der ersten Teilung, das heißt 35, mit 13: macht 455 *perticae*, das sind 1 *iugerum*, 2 *tabulae*, 23 *perticae*.



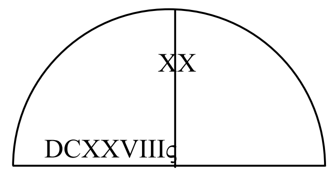
Ager si fuerit lunatus habens foris perticas LX et in sinu suo perticas XX, aequas maiorem partem cum minore et facis partem unam XL. et si in uno capite habuerit perticas X et in alio in punctum desierit, dividis X: fiunt V. hoc ducis per XL: fiunt CC, id est tabulae duae et perticae LVI.

Der Acker sei sichelförmig und messe an seiner Außenseite 60 *perticae* und seiner Innenseite 20 *perticae*. Gleiche den größeren Wert mit dem kleineren aus und du erhältst den Mittelwert 40. Und wenn der Acker an der Stirnseite 10 *perticae* misst und auf der anderen Seite in einen Punkt übergeht, dann berechne die Hälfte von 10: macht 5. Diese Zahl multipliziere mit 40: macht 200, das sind 2 *tabulae* und 56 *perticae*.



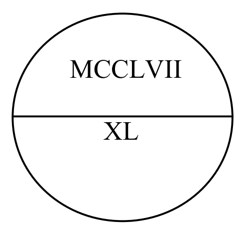
Ager si fuerit semicirculus, cuius basis habeat perticas XL, curvaturae latitudo habeat perticas XX, oportebit multiplicare latitudinem cum base, id est vicies quadrageni fiunt perticae DCCC. hoc undecies multiplicatum fiunt VIIIDCCC. huius sumo partem quartam decimam, id est DCXXVIIIς; tot esse dicimus quadratas perticas, quae faciunt iugera duo et tabulam dimidiam et perticas XVIς.

Der Acker sei halbkreisförmig und messe an seiner Basis 40 *perticae*; die Höhe der Krümmung beträgt somit 20 *perticae*. Ich muss die Höhe mit der Basis multiplizieren, das heißt 20 mal 40: macht 800 perticae. Dies elfmal gerechnet ergibt 8800. Davon berechne ich den vierzehnten Teil, das heißt 628½. Ebensoviele *perticae* im Quadrat misst der Acker, das sind 2 *iugera*, ½ *tabula*, 16½ *perticae*.



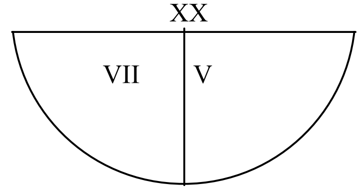
Ager si fuerit rotundus circuli speciem habens, sic podismum colligo. esto area rotunda, cuius diametrus habeat perticas XL. has in se multiplico, quae fiunt perticae MDC. hanc summam undecies multiplico: fiunt perticae XVIIDC. ex qua summa quartam decimam deduco, id est perticas MCCLVII, pedem I = = –, quae summa efficit iugera IIII, tabulam I, perticas XXXIII.

Wenn ein rundes Feld die Form eines Kreises hat, so berechne ich seine Fläche folgendermaßen: gegeben sei eine kreisförmige Fläche, deren Durchmesser 40 *perticae* misst. Diese multipliziere ich mit sich, macht 1600 *perticae*. Dieses Ergebnis multipliziere ich mit 11: macht 17600. Davon bestimme ich den vierzehnten Teil, das heißt 1257 *perticae* $1^{5}/_{12}$ Fuß, das macht 4 *iugera*, 1 *tabula*, 33 *perticae*.



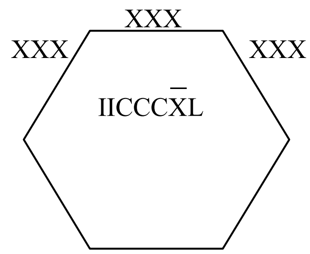
Ager si minor fuerit quam semicirculus, arcum sic metimur. esto arcus, cuius basis habeat perticas XX, latitudo perticas V. latitudinis cum base iungo numerum: fiunt perticae XXV. hoc duco quater: fiunt C. horum pars dimidia sunt L. item perticae XX, quae sunt in basi, pars dimidia sunt X. qui in se multiplicati fiunt C. horum quartam decimam duco, qui remanent perticae VII, pes I = = –. quibus adicio perticas L, quas superius duxi. iunctis itaque numeris utriusque summae faciunt perticas LVII. hoc in arcu esse dicimus.

Wenn ein Feld weniger als eine Halbkreisfläche ist, berechnen wir das Segment folgendermaßen: gegeben sei ein Segment, dessen Basis 20 *perticae* und dessen Höhe 5 *perticae* misst. Ich addiere die Maßzahl der Höhe mit der Basis: macht 25 *perticae*. Dies rechne ich viermal: macht 100. Die Hälfte davon ist 50. Ebenso ist die Hälfte der 20 *perticae*, die die Basis misst, 10. Diese mit sich multipliziert ergibt 100. Davon berechne ich den vierzehnten Teil, das sind 7 *perticae* und $1^{5}/_{12}$ Fuß. Dazu addiere ich die 50 *perticae*, die ich oben berechnet habe. Nach der Addition beträgt das Ergebnis 57 *perticae*. Ich behaupte, dass dies die Fläche des Segmentes ist.



Ager si fuerit sex angulorum, in quadratos pedes sic redigitur. esto hexagonum, in quo sint per latus unum perticae XXX. latus unum in se multiplico, is est tricies triceni: fiunt perticae DCCCC. huius summae tertiam partem statuo, is est CCC. nihilo minus ex eadem pleniori summa decimam partem tollo, id est XC. Quae pariter iunctae faciunt CCCXC. quae sexies ducendae sunt, quia sex latera habet: quae summa colligit perticas IICCCXL. tot igitur quadratas perticas in hoc agro esse dicimus.

Ist das Feld sechseckig, dann bringt man es folgendermaßen auf eine Quadratfußzahl. Gegeben sei ein Sechseck, das auf jeder Seite 30 *perticae* misst. Ich multipliziere eine Seite mit sich, das heißt 30 mal 30: macht 900 *perticae*. Von diesem Ergebnis nehme ich ein Drittel, also 300. Ebenso nehme ich von demselben größeren Ergebnis ein Zehntel, also 90. Diese ergeben miteinander addiert 390. Dieses Ergebnis muss man sechsmal nehmen, da das Feld sechs Seiten. Das Ergebnis lautet auf 2340 *perticae*. Ich behaupte, dass ebensoviele *perticae* im Quadrat in einem solchen Feld enthalten sind.



Si fuerit archa longa pedes XXX, lata pedes XV, alta pedes VII, duco longitudinem per altitudinem: fiunt ped. CCX. hoc duco per latitudinem: fiunt pedes IIICL. Sic quaerimus pedaturam.

Gegeben ist eine Kiste, 30 Fuß lang, 15 Fuß breit, 7 Fuß hoch. Ich multipliziere die Länge mit der Höhe: macht 210 Fuß. Dieses Ergebnis multipliziere ich mit der Breite: macht 3150 Fuß. So berechnen wir das Fassungsvermögen in Füßen.

Euklids Elemente im Überblick

Geometria speculativa

Als **Gregor Reisch** in seiner *Margarita philosophica* (gedr. 1503) den Lehrstoff der philosophischen Fakultäten seiner Zeit – das waren im Wesentlichen die sieben *artes liberales* der Antike – zusammenfasste, da gliederte er das sechste Buch ***Geometria*** in zwei Teile, in die *geometria speculativa* und in die *geometria practica*. Damit folgte Reisch einer jahrtausendealten Tradition, die von Ägypten und Babylon ihren Ausgang nahm, in der griechischen Mathematik ihren Höhepunkt erlebte und im Abendland bis ins späte Mittelalter weiterwirkte.
In der *geometria speculativa* werden geometrische Figuren beschrieben und Sätze über diese Figuren ohne Beweis aufgezählt. Dieser Aspekt der Geometrie folgt im Wesentlichen den Στοιχεῖα („Elemente“) des **Euklid** (~340 – ~270 v.Chr.). Da die Elemente Euklids bis ins 19. Jahrhundert das Lehrbuch der abendländischen Geometrie waren, empfiehlt es sich, eine kurze Übersicht über den Inhalt dieses Werkes zu geben.

Buch I: Definitionen

1. Ein Punkt ist, was keine Teile hat.
2. Eine Linie ist eine breitenlose Länge.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
4. Eine gerade Linie (Strecke) ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.
5. Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.
6. Die Enden einer Fläche sind Linien.
7. Eine ebene Fläche ist eine solche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt.
8. Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen.
9. Wenn die den Winkel umfassenden Linien gerade sind, heißt der Winkel geradlinig.
10. Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein rechter; und die stehende gerade Linie heißt senkrecht zu der, auf der sie steht.
11. Stumpf ist ein Winkel, wenn er größer als ein rechter ist,
12. spitz, wenn kleiner als ein rechter.
13. Eine Grenze ist das, worin etwas endigt.
14. Eine Figur ist, was von einer oder mehreren Grenzen umfasst wird.
15. Ein Kreis ist eine ebene, von einer einzigen Linie – die Umfang heißt – umfasste Figur mit der Eigenschaft, dass alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkt bis zur Linie laufenden Strecken einander gleich sind,
16. und dieser Punkt heißt Mittelpunkt des Kreises.

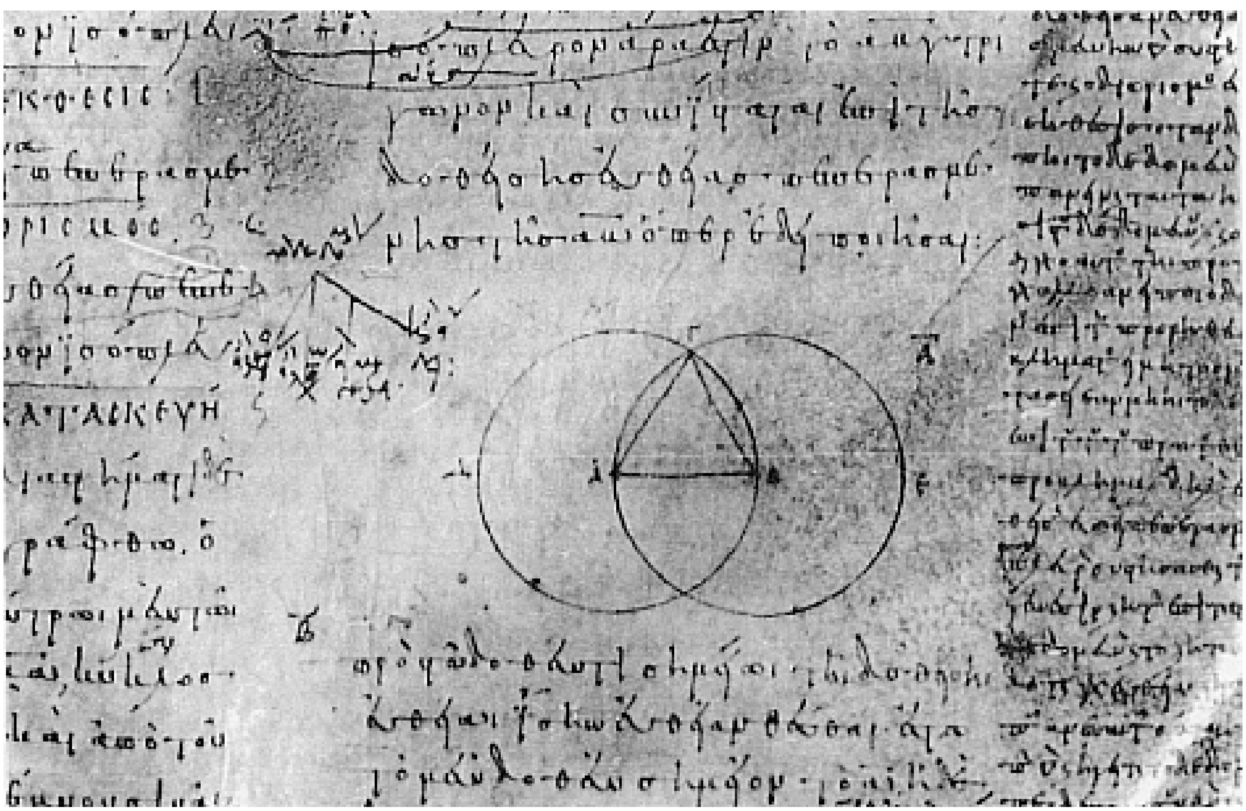
17. Ein Durchmesser des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden Seiten vom Kreisumfang begrenzte Strecke; eine solche hat auch die Eigenschaft, den Kreis zu halbieren.
18. Ein Halbkreis ist die vom Durchmesser und dem durch ihn abgeschnittenen Bogen umfasste Figur; und Mittelpunkt ist beim Halbkreis derselbe Punkt wie beim Kreis.
19–22. ⟨Erklärung der verschiedenen Arten von geradlinigen Figuren, Dreiecken und Vierecken.⟩
23. Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert, auf keiner einander treffen.

Postulate. Αἰτήματα

Gefordert soll sein:
1. Dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,
2. Dass man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,
3. Dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,
4. Dass alle rechten Winkel einander gleich sind,
5. Und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Axiome. κοιναὶ ἔννοιαι

1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
2. Wenn Gleiches Gleichem hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.
3. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.
4. Wenn Ungleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen ungleich.
5. Die Doppelten von demselben sind einander gleich.
6. Die Halben von demselben sind einander gleich.
7. Was einander deckt, ist einander gleich.
8. Das Ganze ist größer als der Teil.
9. Zwei Strecken umfassen keinen Flächenraum.



Geometrische Figur aus ***Codex Vaticanus graecus*** 190, I (10 Jh.). fol 15 r: Konstruktionszeichnung zu Euklid, elementa I,1: Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks über der Strecke AB.

Es folgen Grundkonstruktionen (Abtragen von Strecken und Winkeln, Fällen von Loten usw.) und die dazu erforderlichen Sätze, insbesondere Kongruenzsätze. § 16: Satz vom Außenwinkel.§ 27–31 bringen Sätze über Parallele, von § 29 an unter Benutzung des Parallelenpostulats, das für das Folgende unentbehrlich ist. § 32: Winkelsumme im Dreieck. § 33,34: Existenz von Parallelogrammen und damit von Rechtecken. Die Diagonale halbiert das Parallelogramm.
Dann folgen die Lehre vom Flächeninhalt und der Satz des Pythagoras.

Buch II. „Geometrische Algebra“

Geometrische Beweise von Sätzen, die wir eher algebraisch formulieren, wie:
§ 4. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
§ 8. $4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2$
Sie werden später als Hilfssätze gebraucht.

Buch III. Kreislehre

Def. 2: Dass sie den Kreis berühre, sagt man von einer geraden Linie, die einen Kreis trifft, ihn aber bei Verlängerung nicht schneidet.
Def. 6: Kreisabschnitt ist die von einer Strecke und einem Kreisbogen begrenzte Figur.
Def. 7: Winkel des Abschnitts ist der von der Strecke und dem Kreisbogen umfasste.
§ 16: Eine rechtwinklig zum Kreisdurchmesser vom Endpunkt aus gezogene gerade Linie muss außerhalb des Kreises fallen, und in den Zwischenraum der geraden Linie und des Bogens lässt sich keine weitere gerade Linie nebenhineinziehen.
Der Winkel des Halbkreises ist größer als jeder spitze geradlinige Winkel, der Restwinkel kleiner.

Buch IV. Regelmäßige Polygone (Dreieck, Quadrat, Fünfeck, Fünfzehneck) und ihre ein- und umbeschriebenen Kreise.

Buch V. Darin entwickelt Euklid eine allgemeine Theorie der Größenverhältnisse, die auf **Eudoxos** zurückgehen soll.
Def. 4: Dass sie ein Verhältnis zueinander haben, sagt man von Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können.
Def. 5: Man sagt, dass Größen in demselben Verhältnis stehen, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind.

Buch VI. Ähnlichkeitslehre

§ 19: Ähnliche Dreiecke (§ 20: Ähnliche Vielecke) stehen zueinander zweimal im Verhältnis entsprechender Seiten. (d.h. die Flächen verhalten sich wie die Quadrate der Seiten)
In § 27–29 steht die geometrische Lösung quadratischer Gleichungen.

Die arithmetischen *Bücher VII – IX* scheinen den konsequenten Aufbau zu unterbrechen. Aber gerade wenn man weiß, dass die Verhältnisse ganzer Zahlen für die Geometrie nicht ausreichen, ist es sinnvoll, die Theorie dieser Zahlenverhältnisse zu entwickeln, um zu sehen, wie weit man damit kommt und was man damit nicht mehr erreichen kann. So wird in VI, § 12 gezeigt, dass man zu drei Strecken stets mittels ähnlicher Dreiecke eine vierte proportionale Strecke konstruieren kann, während in IX, § 19 gezeigt wird, dass es zu drei Zahlen a,b,c nur dann eine vierte Proportionale ($a:b = c=x$) gibt, wenn bc durch a teilbar ist.

Buch VII beginnt mit der klassischen Definition der Zahl:

Def. 1: Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird.
Def. 2: Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge.
Def. 3–5 beschreiben die Verhältnisse, in denen zwei Zahlen zueinander stehen können. Dazu wird in § 4 bewiesen, dass es keine anderen Verhältnisse zwischen Zahlen geben kann. In § 20 wird auf dieser Grundlage die Gleichheit von Zahlenverhältnissen definiert.
Vorher wird die Einteilung der Zahlen in gerade und ungerade usw., Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen erklärt. Auf die Definitionen folgt die Erklärung der Wechselwegnahme (wechselseitige Subtraktion):
§ 1: Nimmt man bei Vorliegen zweier ungleicher Zahlen abwechselnd immer die kleinere von der größeren weg, so müssen, wenn niemals ein Rest die vorangehende Zahl genau misst, bis die Einheit übrig bleibt, die ursprünglichen Zahlen gegeneinander prim sein.
In § 2 wird nach dieser Methode der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen ermittelt,
Von dem reichen Inhalt der arithmetischen Bücher erwähne ich nur noch die Frage der Einschaltung von einem oder zwei geometrischen Mitteln zwischen zwei gegebenen Zahlen in Buch VIII, die für die Rationalität oder Irrationalität von Quadrat- und Kubikwurzeln entscheidend ist, ferner die Sätze über die Zerlegung einer Zahl in Primzahlen, sowie die Lehre vom Geraden und Ungeraden und den Satz über vollkommene Zahlen am Ende von *Buch IX.*

In *Buch X, das vermutlich von Theaitetos stammt, wird eine Theorie der quadratischen Irrationalitäten entwickelt. Es beginnt ähnlich wie Buch VII:*

§ 1: Nimmt man bei Vorliegen zweier ungleicher (gleichartiger) Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte weg und vom Rest ein Stück größer als die Hälfte und wiederholt dies immer, dann muss einmal eine Größe übrig bleiben, die kleiner als die kleinere Ausgangsgröße ist.
Dieser Satz folgt leicht aus V, Def. 4. Er ist die Grundlage der ganzen griechischen Infinitesimalrechnung.
§ 2: Misst, wenn man unter zwei ungleichen Größen abwechselnd immer die kleinere von der größeren wegnimmt, der Rest niemals genau die vorhergehende Größe, so müssen die Größen inkommensurabel sein.
Den Hauptinhalt des Buches bildet eine Theorie und Klassifikation der Irrationalitäten, die in *Buch XIII* benutzt wird.
Am Ende des Buches steht der Beweis dafür, dass in jedem Quadrat die Diagonale der Seite linear inkommensurabel ist.

Mit *Buch XI beginnt die Geometrie der räumlichen Figuren.*

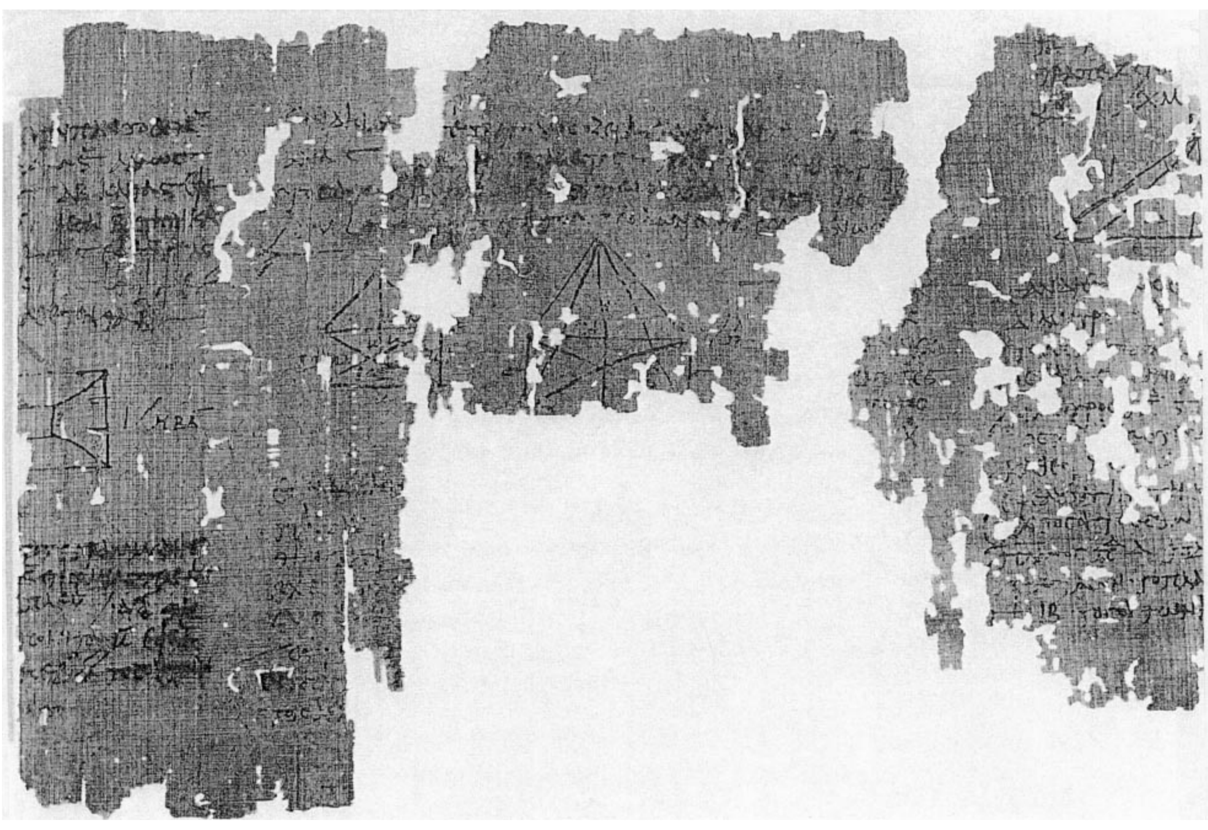
Bemerkenswert ist, dass Kugel, Kegel und Zylinder durch Bewegung (Drehung eines Halbkreises, eines rechtwinkligen Dreiecks, eines Rechtecks) definiert werden.
Dann folgen (ähnlich wie in *Buch I*) grundlegende Sätze wie:
§ 3: Wenn zwei Ebenen einander schneiden, ist ihr Schnittgebilde eine gerade Linie,
ferner Sätze, die ohne Infinitesimalbetrachtungen beweisbar sind, z.B.
§ 32: Parallelflache unter derselben Höhe verhalten sich zueinander wie die Grundflächen.
§ 33: Ähnliche Parallelflache stehen zueinander dreimal im Verhältnis entsprechender Kanten.

In *Buch XII wird die Exhaustionsmethode angewandt, um zu beweisen:*

§ 2: Kreise verhalten sich zueinander wie die Quadrate über den Durchmessern.
§ 7, Zusatz: Jede Pyramide ist ein Drittel des Prismas, welches mit ihr dieselbe Grundfläche und dieselbe Höhe hat.
§ 10: Jeder Kegel ist ein Drittel des Zylinders, der mit ihm dieselbe Grundfläche und die gleiche Höhe hat.
§ 18: Kugeln stehen zueinander dreimal im Verhältnis ihrer Durchmesser.

Buch XIII behandelt die Konstruktion der regelmäßigen Polyeder.

Es wird angegeben, zu welcher Klasse von Irrationalitäten das Verhältnis der Kanten zum Kugeldurchmesser gehört.



Geometrische Figuren auf ***Papyrus Vindobonensis graecus*** 19996 (1.Jh.v.Chr.)

So prägend die Elemente Euklids für die mathematisch exakte Entwicklung der Geometrie auch waren, so wenig Widerhall fanden sie in der römischen wissenschaftlichen Literatur. Erst **Boethius** (~ 480–524 n.Chr.) hat sein Augenmerk Euklid zugewandt und, wie **Cassiodorus** (*instit.* II 4,3) berichtet, die Elemente ins Lateinische übertragen. Diese Übertragung dürfte allerdings nicht vollständig gewesen sein. Sie enthielt wahrscheinlich nur

i. die Definitionen, Postulate und Axiome von *Buch I*
ii. die Definitionen von *Buch II, III, IV* und *V*
iii. die Sätze von *Buch I – IV* allerdings ohne Beweise.

Diese lateinische Euklidübersetzung des Boethius bildete dann die Vorlage für zahlreiche mittelalterliche Euklidbearbeitungen.

(Vgl. **Menso Folkerts**: anonyme lateinische Euklidbearbeitungen aus dem 12.Jh. Österr.Akad.d.Wiss. Math.nat. Kl.Denkschr. 116 (1971). 1. Abh. S. 5–42)

Während also im Abendland nur ein bescheidener Rest der Elemente weiterwirkte, war die Bedeutung Euklids im hellenistischen Osten ungeschmälert. Im 5. Jh.n.Chr. schrieb **Proklos** einen ausführlichen Kommentar zu Euklids Elementen, der viele wertvolle historische Nachrichten enthält. Nach dem Untergang der römischen Herrschaft waren es vor allem arabische Mathematiker, die die Werke Euklids vor dem Vergessen bewahrten und in der Folge im späten Mittelalter an das Abandland weitergaben. Die erste vollständige Übersetzung der Elemente Euklids aus dem Arabischen ins Lateinische besorgte **Adelhard von Bath** zwischen 1116 und 1142. Dieser Text wurde erstmals 1482 in Venedig gedruckt. Eine Edition des griechischen Originaltextes erfolgte erstmals 1533 in Basel.

Praktische Geometrie antiker Feldmesser (Text 10)

Geometria practica

Im zweiten Teil, *geometria practica*, behandelt **Gregor Reisch** das Messen mit dem Quadranten und dem Jakobsstab, sowie die Berechnung von Flächeninhalten und Volumina. Dass die rechnende Geometrie von der theo-

Titelblatt zu Buch VI, *Geometria*. Aus **G. Reisch**: *Margarita philosophica*. Freiburg, 1503.

retischen getrennt war, hatte seine Ursache in der griechischen Philosophie. Der hellenistische Biograph **Plutarch** (~46 – ~120 n.Chr.) berichtet von einer bemerkenswerten Auseinandersetzung in der Platonischen Akademie über die Bezüge der Mathematik zur Mechanik (Plutarch: Marcellus 14 ,9ff):

„Mit dieser hochbeliebten und vielgepriesenen Mechanik und Technik hatten sich nämlich zuerst Eudoxos und Archytas zu beschäftigen begonnen, indem sie die Mathematik interessant zu machen unternahmen und Probleme, die durch theoretische und zeichnerische Beweisführung nicht leicht lösbar waren, durch sinnfällige mechanische Apparaturen unterbauten, wie sie zum Beispiel beide das grundlegende Problem der Findung der zwei mittleren Proportionalen, das für viele zeichnerische Konstruktionen unerlässlich wichtig ist, durch mechanische Instrumente zur Lösung führten, indem sie, ausgehend von krummen Linien und Schnitten, nach deren Muster gewisse Mittelwertzeichengeräte konstruierten. Als sich aber Platon darüber entrüstete und sie heftig angriff, weil sie den Adel und die Reinheit der Mathematik zerstörten und vernichteten, wenn diese aus der unkörperlichen Sphäre des reinen Denkens ins Sinnliche hinabglitte und sich körperlicher Dinge zu bedienen beginne, die vieler niedrigen, handwerksmäßigen Verrichtungen bedürften, so wurde die Mechanik aus der Mathematik verbannt und von ihr abgetrennt."

Zu dieser Auseinandersetzung wäre anzumerken, dass sich den griechischen Denkern die Welt des reinen Geistes, der Platonische Ideenhimmel nicht durch eine unmittelbare Offenbarung erschlossen hat. Am Anfang standen wie bei den Ägyptern und Babyloniern praktische Fragestellungen, die einer Lösung harrten. Erst unter dem Einfluss der eleatischen Philosophie und der platonischen Ideenlehre vollzog sich die radikale Abkehr der griechischen Mathematik von den Problemen der Praxis in die Welt des reinen Geistes. Diese Entwicklung führte dann zu präzisen Deduktionen der mathematischen Sätze aus einem vorgegebenen Axiomensystem und gipfelte in den schon erwähnten „Elementen" Euklids. Die realen Objekte der Mathematiker waren nicht mehr die vom Handwerker hergestellten Modelle, sondern die mathematischen Ideen. Andrerseits macht der vorhin zitierte Bericht Plutarchs klar, dass selbst im Zeitalter der Platonischen Akademie die Bezüge zur Praxis nie ganz verdrängt werden konnten. Aber solche „Verirrungen" waren damals die Ausnahmen.
Vier Jahrhunderte später entdecken wir ein völlig neues Verständnis vom Wesen der Mathematik in den Schriften des Alexandriners **Heron**. Er vertritt im Gegensatz zur reinen Theorie die Praxis, er fügt den starren Formulierungen Euklids Erläuterungen hinzu, um dem Schüler die abstrakten Wahrheiten verständlicher zu machen. Im Vorwort seines Werkes Γεωμετρική finden wir eine Sammlung von Definitionen, die von der Erklärung des Begriffes „Punkt" bis zur Antwort auf die Frage: „Was ist Mathematik?" reicht. Zum Begriff der „Proportion" schreibt Heron (*opera* IV p. 80 ed. Schmidt):

„Eine Proportion aber ist innerhalb wenigstens drei Grenzen eingeschlossen, indem als Grenzen entweder die Größen oder die ihnen beigefügten Zahlen genommen werden."

Damit ordnet Heron jeder Strecke eine Zahl als Länge zu, jeder ebenen Figur einen in Zahlen zu messenden Flächeninhalt. Diese Zahlen können aber nicht nur ganze Zahlen sein, auch die positiven rationalen Zahlen kommen gleichberechtigt hinzu. Dass man bei der Zuordnung von Zahlen zu den Größen mit den Brüchen nicht auskommt, das wusste auch Heron. Aber er nahm das nicht schwer. Da tritt etwa in seiner „Vermessungslehre" bei der Berechnung eines Flächeninhalts die Quadratwurzel aus 720 auf. Heron vermerkt dazu (*opera* III p. 18 ff. ed. Schmidt):

„Da nun 720 eine rationale Wurzel nicht besitzt, so werden wir mit kleinster Differenz die Wurzel folgendermaßen ziehen:
Da die 720 nächstkommende Quadratzahl 729 ist und die Wurzel 27 hat, so teile ich 720 durch 27. Es ergibt sich $26\ {}^{2}/_{3}$.

$$27 + 26\ {}^{2}/_{3} = 53\ {}^{2}/_{3}$$
$$½ \,.\, 53\ {}^{2}/_{3} = 26\ ½ + {}^{1}/_{3}\,.$$

Es wird also die Wurzel aus 720 annähernd $26\ ½\ {}^{1}/_{3}$ sein. Denn $(26\ ½\ {}^{1}/_{3})^2 = 720\ {}^{1}/_{36}$, so dass die Differenz nur ${}^{1}/_{36}$ beträgt."

Eine Wiederholung dieses Approximationsprozesses führt dann zu einem Ergebnis, bei dem die Differenz „viel kleiner als ${}^{1}/_{36}$ wird."
Dieses praktische Verständnis von Mathematik findet sich auch in allen anderen Werken Herons. Es lohnt sich daher, sich den Inhalt seines Hauptwerkes Γεωμετρική genauer anzuschauen und mit dem Werk Euklids zu vergleichen.

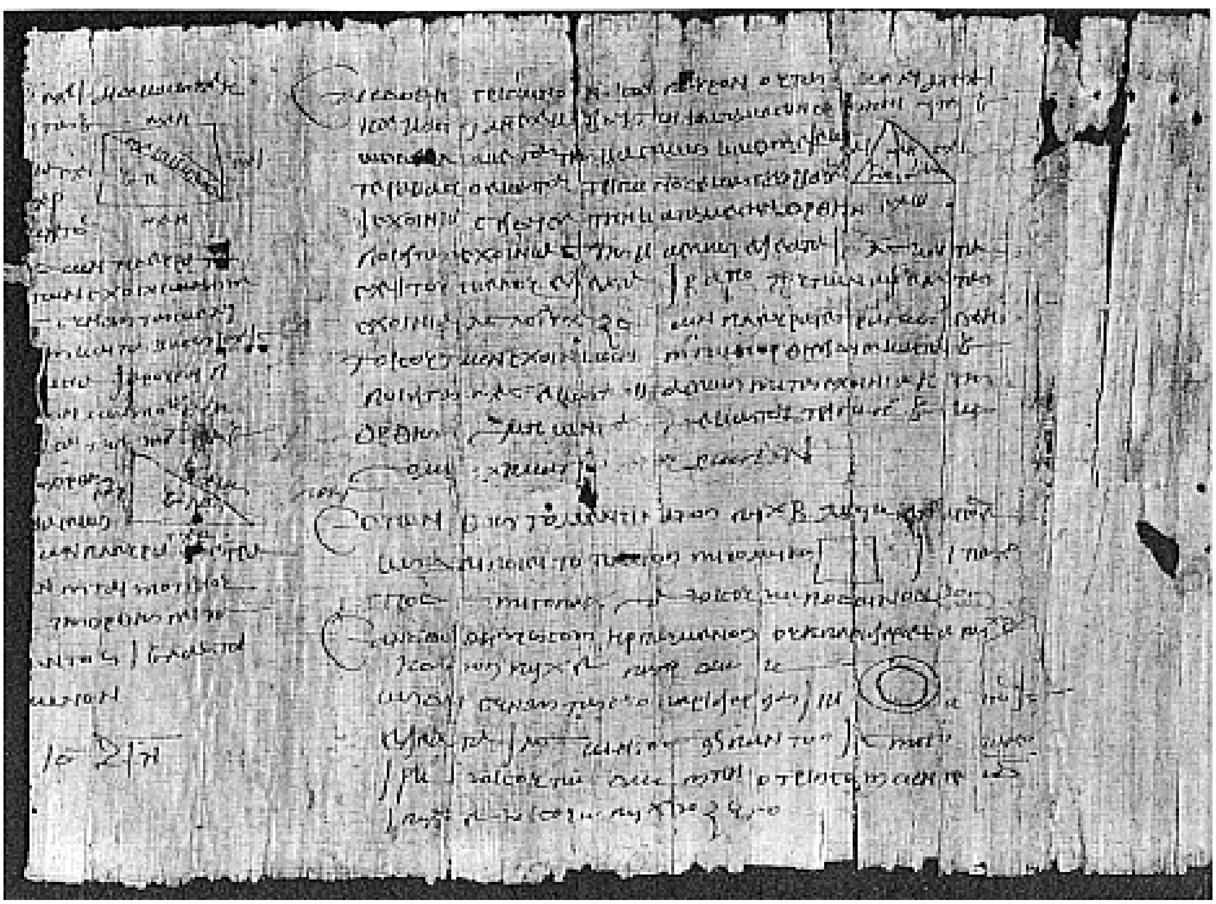
Geometrische Definitionen, zwischen welche eine historische Notiz über den Ursprung der Geometrie mit Hinblick auf den jährlichen Austritt des Nils eingeschaltet ist, und eine Maasstabelle eröffnen das Buch der Geometrie. Nach diesen kommt die Berechnung von Quadraten und Rechtecken, deren Fläche und deren Diagonale gesucht wird. Das rechtwinklige Dreieck folgt, auf dieses die aneinanderhängenden Dreiecke, das gleichseitige, das gleichschenklige, das beliebige Dreieck. Beim rechtwinkligen Dreiecke werden die Methoden des Pythagoras und des Platon zur Auffindung rationaler Seitenlängen gelehrt; beim beliebigen Dreiecke wird die Senkrechte von der Spitze auf die Grundlinie gefällt und unterschieden, ob diese Senkrechte die Basis selbst trifft und Abschnitte auf ihr erzeugt, oder ob sie jenseits der Basis eintreffend eine Ueberragung hervorbringt; es wird aber auch die heronische Formel unmittelbar angewandt, welche ohne Durchgang durch die Berechnung des Abschnittes, beziehungsweise der Ueberragung und der Höhe die Dreiecksfläche sofort aus den drei Seiten ableitet. Nun folgt die Rückkehr zum Vierecke und zu den mannigfaltigsten Zerlegungen einer Figur durch Hilfslinien. Quadrate in gleichschenklige Dreiecke eingezeichnet, Rhomben oder verschobene Quadrate, Rechtecke, Parallelogramme, rechtwinklige Trapeze, gleichschenklige

Trapeze, beliebige Vierecke werden so der Berechnung unterzogen. Nach den gradlinig begrenzten Figuren wendet Heron sich zum Kreise und zu dessen Theilen. Durchmesser, Umfang, Inhalt des Kreises werden gegenseitig aus einander abgeleitet. Die Fläche eines Kreisabschnittes und die Länge seines Bogens werden aus der Sehne und Höhe des Abschnittes ermittelt, und auch der Ring zwischen zwei concentrischen Kreisen wird berechnet. Vom Kreise kehrt der Verfasser zu den regelmässigen Vielecken zurück, indem er Formeln gibt, welche die Flächen dieser Vielecke vom Fünfecke bis zum Zwölfecke aus der Seitenlänge finden lehren.

(**Moritz Cantor**: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Leipzig. 1880. Band I. S. 327)

Solche Flächenberechnungen stellen ein Hauptkapitel antiker, speziell auch römischer Geometrie dar. Rechtecke, gleichschenklige Dreiecke, ebenso Paralleltrapeze, dann auch unregelmäßige Vierecke, die sich nicht wesentlich von der Quadratform unterscheiden, bilden die Grundfiguren, auf deren Berechnung jede beliebige Figur durch Zerschneiden zurückgeführt wurde. Den praktischen Feldmessern standen Näherungsformeln zu Gebote, die bei vorsichtiger Wahl der Figuren nur unwesentliche, jedenfalls noch zulässige Abweichungen ergaben. Haben die gleichschenkligen Dreiecke und Trapeze (Schenkel a, Basis g, bzw. g_1 und g_2) steile Basiswinkel, so liefern die unrichtigen Formeln $^{g}/_{2} \cdot a$ bzw. $(g_1+g_2) \cdot {}^{a}/_{2}$, nach denen schon im ***Papyrus Rhind*** gerechnet wird, ganz annehmbare Werte. Auch Heron wendet diese Formeln in seinen feldmesserischen Schriften an, die ganz in ägyptischer Tradition stehen. Bei ihm findet sich auch zur Berechnung der Fläche eines allgemeinen Vierecks die Formel $^{a+c}/_{2} \cdot {}^{b+d}/_{2}$ – wo *abcd* die vier Seiten in der angegebenen Reihenfolge bedeuten – bzw. für das allgemeine Dreieck die Formel $^{a+c}/_{2} \cdot {}^{b}/_{2}$, indem die vierte Seite d als Null angenommen wird. Selbstverständlich kennt Heron auch die genaue Berechnung eines allgemeinen Dreiecks durch die Formel $\frac{1}{2}\, g\, h$.

So grundfalsch die erwähnten Näherungsformeln auch sind, so verwertbar sind sie, wenn man sie auf unregelmäßige Vierecke von nahezu quadratischer Form beschränkt. Daraus erklärt sich auch, dass der mathemathisch wenig



Flächen- und Diagonalberechnungen in Rechtecken und rechtwinkeligen Dreiecken. ***Papyrus Berolinensis*** 11529 (2.Jh.n.Chr.)

gebildete Feldmesser an diesen Formeln festhielt, obwohl von der Wissenschaft längst die genaueren Formeln entwickelt worden waren. Doch die Anwendung derselben erforderte meist eine aufwendige Rechenarbeit, wie etwa das Quadratwurzelziehen. So blieb man bei den überlieferten Techniken und rechnete in Rom mit denselben Methoden wie Jahrtausende zuvor in Ägypten. Wie ein roter Faden lässt sich diese uralte Praxis der näherungsweisen Flächenberechnung bis zum Ende des Mittelalters verfolgen.
Der Feldmesser durfte sich mit Annäherungen begnügen, nicht jedoch der reine Theoretiker. Der streng abstrakte Geist des griechischen Mathematikers vergrößerte diese Kluft noch mehr. Die Zurückhaltung vor irgend einer praktischen Anwendung der rein geometrischen Resultate ging so weit, dass nirgends in Euklids „Elementen“ die Berechnung von Flächen gelehrt wird. Man hat immer wieder gesagt, dass der mathematische Unterricht an Schulen und Universitäten bis ins 19. Jahrhundert hinein durch das Werk Euklids bestimmt war. Das erscheint heute nur mehr bedingt richtig. Die „Elemente“ waren den Schulmeistern doch in manchen ihrer Teile viel zu schwierig. Die Größenlehre des Eudoxos wurde meist ersetzt durch die rechnende Geometrie Herons. Wenn man überspitzte Formulierungen liebt, kann man die Behauptung wagen, dass nicht Euklid, sondern Heron fast zwei Jahrtausende überdauert hat.

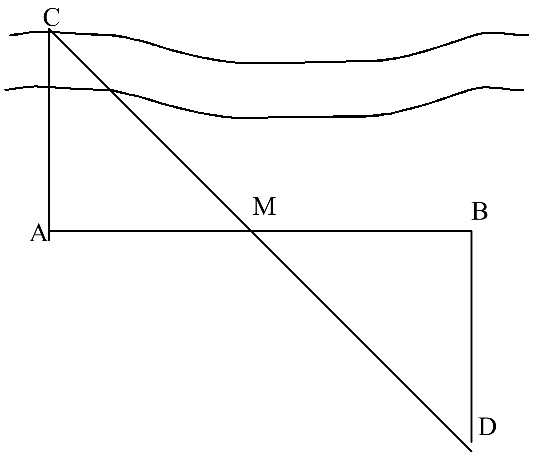
TEXT 10 Marcus Iunius Nipsus: lib. II fluminis varatio

Dieser Text stammt von **M. Iunius Nipsus**, einem *agrimensor* des 2.Jh.n.Chr., und ist somit eines der ältesten Zeugnisse römischer Feldmessarbeit. Er ist zusammen mit anderen thematisch ähnlichen Texten im ***Codex Arcerianus*** (um 500 n.Chr.) überliefert. In diesem Text zeigt sich auf unvergleichliche Weise, wie die römischen Feldmesser bei ihrer Arbeit vorgingen. Sie machten sich die Erkenntnisse der theoretischen Geometrie – im vorliegenden Fall die Sätze I 26 und I 15 über kongruente Dreiecke aus den „Elementen“ Euklids – zu Nutze und lösten damit praktische Vermessungsaufgaben wie die folgende: Es ist die Breite eines Flusses von einem Ufer aus zu messen, ohne den Fluss zu überschreiten. Bei ihrer Arbeit verwendeten die *agrimensores* ein einfaches Vermessungsgerät, die *groma*, ein durch ein Senkblei ins Lot gebrachtes rechtwinkeliges Visierkreuz.

si in agri quadratura tibi dictanti occurrerit flumen quod necesse sit varari, sic facies. rigor qui inpegit in fluvio, exinde versuram facies. in quam partem verteris, tertrantem pones. deinde transferes ferramentum in eo rigore quem dictaveris ex eo rigore qui in flumine inpegerat. deinde transferes ferramentum, et conprehenso eo rigore quem dictasti, versuram facies in partem dextram. deinde exiges medium illum rigorem a tetrante ad tetrantem, et divides illum in duas partes et signum pones perpensum. deinde figes ferramentum ad signum quod dividet duas partes quas divisisti. ex fixo ferramento et perpenso conprehenso rigore ad umbilicum soli emissum perpendiculum cum super signum ceciderit, percuties cromam donec comprehendes signum quod posueras trans flumen. cum diligenter conprehenderis, transies ex alia parte ferramenti et manente croma dictabis rigorem. ubi se consecuerit norma tua cum eo rigore quem dictaveris, signum

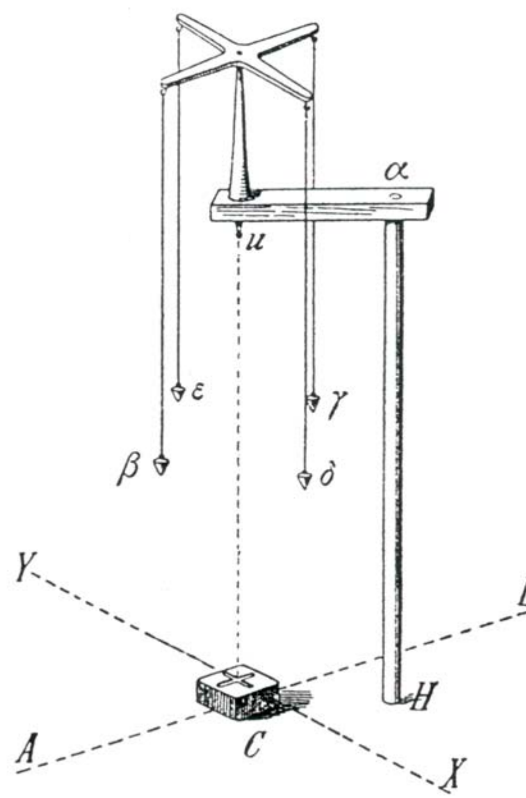
Grabstele des Lucius Aebutius Faustus in Eporedia mit der Darstellung einer *groma*

Wenn dir beim Ausmessen eines rechtwinkeligen Feldes ein Fluss entgegentritt, dessen gekrümmtes Ufer übermessen werden muss, sollst du wie folgt vorgehen. Zuerst wirst du eine gerade Linie bis ans Ufer des Flusses ziehen; dann wirst du zu dieser Linie eine Normale einzeichnen. An der Stelle (A), von der die Normale ausgeht, wirst du einen Markierungspunkt setzen. Dann wirst du das Stativ für das Visierkreuz auf die Linie setzen, die du von der Linie aus, die an den Fluss heranreicht, gezogen hast. Dann wirst du das Stativ auf der vorhin gezogenen Linie versetzen und nach Justierung wiederum eine Normale, doch diesmal nach rechts, einzeichnen und dort einen Markierungspunkt (B) setzen. Dann wirst du jene Strecke (AB) zwischen den Markierungspunkten halbieren und den Mittelpunkt (M) kennzeichnen. Dann wirst du das Stativ für das Visierkreuz neben der Stelle, die den Mittelpunkt(M) bezeichnet in den Boden stecken. Am Mittelpunkt des Visierkreuzes, dessen Stativ in Richtung der eingezeichneten Geraden (AB) in die Erde gesteckt wurde, wird ein Senkblei befestigt. Wenn dieses genau auf den Mittelpunkt (M) zeigt, wirst du die *groma* solange drehen, bis du genau die Marke (C) anvisierst, die du auf der anderen Seite des Flusses gesetzt hattest. Bei sorgfältiger Justierung und bei gleichbleibender Einstellung der *groma* wirst du nun in die entgegengesetzte Richtung eine gerade Linie anvisieren. Wo sich deine Visierlinie mit der vorher gezogenen Normalen schneidet, pones, et exiges numeros a signo ad tetrantem. sed quia linea quam secueras media duo trigona ostendit sed quia cathetus catheto par est, erit et basis basi par. quantus ergo numerus basis iunctus trigoni quem exegisti fuerit, tantus rigor alterius trigoni cuius rigorem factum in fluvium numerus. et de hac base quam exegisti tolles hunc numerum quem a tetrante ad fluvium exegisti. reliquum quod superfuerit erit latitudo fluminis.



wirst du wieder eine Marke (D) setzen; miss die Länge von der Marke (D) zur Marke (B). Weil die Linie, die durch den Mittelpunkt (M) geht, zwei Dreiecke bildet, und weil die ersten Katheten der beiden Dreiecke (AM bzw. MB) gleich lang sind, werden auch die zweiten Katheten der beiden Dreiecke gleich lang sein. Ebenso lang wie die zweite Kathete (BD) des einen Dreiecks, die du ausgemessen hast, ist die zweite Kathete des anderen Dreiecks, die über den Fluss reicht. Ziehe nun von der Länge der Kathete (DB), die du vermessen hast, die Länge der Strecke ab, die vom Markierungspunkt (A) zum Fluss reicht. Der Rest, der übrig bleibt, wird so groß wie die Breite des Flusses sein.

Römische Vermessungstechnik (Text 11)



Die *groma* besteht aus einem Stativ (*ferramentum*) und dem eigentlichen Instrument, welches aus einem auf das Stativ aufgesetzten eisernen Träger sowie einem auf diesem ruhenden drehbaren Kreuz (*stella*) aus zwei eisernen Armen bestand. Die Länge der Kreuzarme und die Höhe des Trägers betrug ca. 35 cm. Damit die Kreuzarme, welche rechtwinkelig zueinander stehen mussten, sich nicht verschoben, war das Kreuz in einen Holzrahmen eingespannt, der an den Enden der Arme mit Nägeln befestigt war. Der Mittelpunkt und Drehpunkt des Kreuzes hieß *umbilicus soli*. Die Enden der Kreuzarme hießen *cornicula*. An ihnen hingen die Visierfäden (*fila*). Das Instrument und seine Anwendung veranschaulicht die nebenstehende Rekonstruktion.

Die beiden an demselben Kreuzarm hängenden Fäden stellen die Ebene dar, in deren Richtung die Gerade gezogen werden soll. Da die Kreuzarme senkrecht zueinander stehen, tun es auch die beiden durch die Fadenpaare bezeichneten Ebenen βγ und δε. Es gilt nun zunächst den Schnittpunkt der beiden Ebenen, den *umbilicus soli* U genau über den auf einem Stein durch ein Kreuz bezeichneten Punkt auf dem Boden zu bringen, durch den die gerade Linie laufen soll. Das wird durch ein vom *umbilicus* herabhängendes Lot erreicht, das auf den Punkt unten treffen muss. Um loten als auch um von Faden zu Faden sehen zu können, muss der Raum unter U frei bleiben, also das Stativ exzentrisch angebracht werden. Das wird am einfachsten erreicht, indem man die *stella* auf einen Querarm aufsetzt. Derselbe muss etwa in Augenhöhe angebracht sein, um bequem unter U weg visieren zu können. Damit das in U hängende Lot auf den Punkt unten (C) fällt, muss das Stativ in einem Abstand von C eingesteckt werden, der der Entfernung des Punktes U vom Mittelpunkt des Stativs α entspricht. Wenn man das Stativ in diesem Abstand aufgestellt hat, bringt man den Punkt U durch Drehen des Querarmes über den Punkt C. Der Querarm muss also in α drehbar sein. Wenn C eingelotet ist, bringt man durch Drehen des Kreuzes das Fadenpaar βγ in die Richtung AB und visiert von β über γ nach der nächsten Richtlatte, bis γ durch β verdeckt wird. Nun hat man die erste Linie fixiert; das andere Fadenpaar δε ergibt dann die Normalebene zu βγ und bezeichnet die Normale XY.

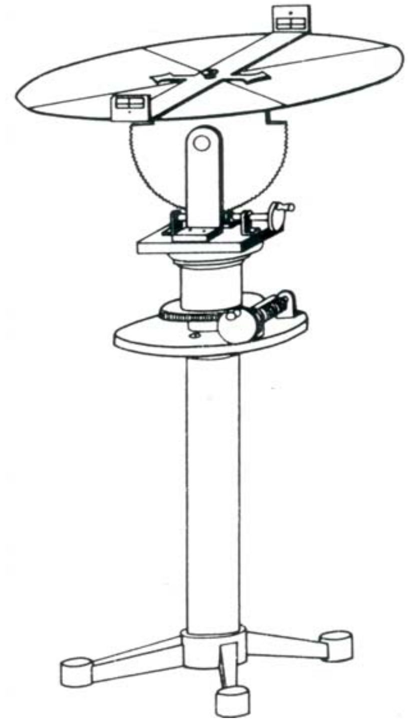
Ihre hauptsächliche Verwendung fand die *groma* bei der Limitation, der Einteilung des Lagers, der Stadt und der Feldflur durch ein System von sich rechtwinkelig schneidenden Wegen. Zunächst wurde die *groma* nach feierlichen Auspizien an dem Punkt aufgestellt, der zum Schnittpunkt der beiden Kardinallinien werden sollte und der wie das

Visierkreuz selbst *groma* hieß. Nachdem mit Hilfe der Visierlinie AB die eine der beiden Hauptlinien – entweder der *decumanus*, indem man nach Sonnenaufgang, oder der *cardo*, indem man in der Richtung der Mittagslinie visierte – gefunden und abgesteckt war, brauchte der *mensor* nur durch das Fadenpaar δε zu visieren, um die zweite, sekundäre Hauptlinie zu erhalten.

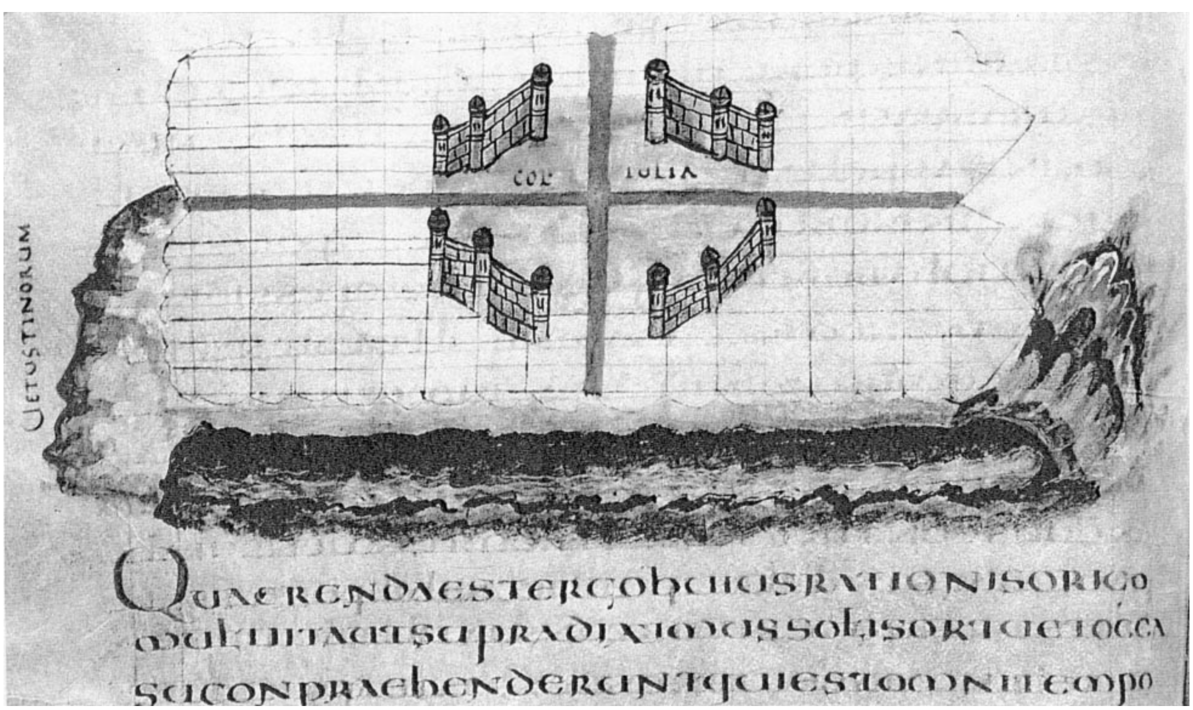
Die anderen Aufgaben, welche mit Hilfe der *groma* zu lösen waren, lassen sich auf die beiden Grundaufgaben

i. durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu legen,
ii. auf dieser Geraden in einem Punkt die Senkrechte zu errichten,

zurückführen. Es sind dies die Einmessung der Peripherie eines Grundstücks, wovon die Bestimmung der Flächen der *subseciva*, der zum Teil gerad-, zum Teil krummlinig begrenzten Teile einer *centuria*, ein besonders wichtiger Fall ist, ferner das Übermessen eines Tales oder Flusses (*varatio fluminis*), die Wiederherstellung eines *limes* usw. Fehler entstanden bei Anwendung der *groma*, wenn entweder das Visierkreuz nicht waagrecht gestellt war und der Punkt U nicht lotrecht über dem Punkt des Steins lag, oder wenn man falsch visiert hatte. Eine Kritik der Mängel der *groma* gibt **Heron** (περὶ διόπτρας c. XXXIII, *opera* III p. 288 ff. ed. Schmidt): bei windigem Wetter bewegen sich die Perpendikel, stellen also nicht mehr eine vertikale Ebene dar. Die von Heron empfohlene *Dioptra* hatte statt der beweglichen Fäden auf den Enden der Arme feststehende Visiere.



Herons *dioptra*, eine Vorrichtung sowohl zur Landvermessung wie auch zur astronomischen Beobachtung. Rekunstruktion von H. Schöne.



Anlage eines Limitationssystems, in welchem sich die Hauptachsen im Zentrum der Koloniestadt kreuzen. Aus ***Codex Arcerianus***. Fol. 49 v.

TEXT 11 podismus

Als Autor dieses Textes wird in den Handschriften **M. Iunius Nipsus** angegeben. Seine Autorschaft ist heute widerlegt. Der Text dürfte im 3. oder 4. Jahrhundert entstanden und später den Schriften des Nipsus hinzugefügt worden sein. Im *Codex Arcerianus* ist er jedenfalls enthalten. *podismus* ist der älteste in lateinischer Sprache verfasste mathematische Text, der uns erhalten ist. Besondere Beachtung verdient er, da in ihm geometrische Probleme behandelt werden, deren Lösung die Kenntnis des Pythagoreischen Lehrsatzes, sowie des Quadrierens von Binomen voraussetzen. Wenngleich der Text im Wesentlichen den *geometrica* des **Heron von Alexandria** folgt, so muss dem Autor doch eine fundierte mathematische Bildung bescheinigt werden. Jedenfalls diente dieses Werk im 9. und 10. Jahrhundert den Verfassern geometrischer Schriften als Vorlage. *podismus* ist somit einer der wenigen erhaltenen lateinischen Texte, die das Wissen griechischer Mathematiker bewahrte und das mathematische Denken des Mittelalters beeinflusste.

Vermessung nach Füßen

Mensurarum genera sunt tria: rectum, planum, solidum. Rectum est, cuius longitudinem tantummodo metimur. Planum est, cuius longitudinem et latitudinem metimur. Solidum est, cuius longitudinem et latitudinem et crassitudinem metimur.
Angulorum genera sunt tria: rectus, acutus, hebes. Rectus est, qui normaliter constitutus est. Acutus est, qui minor est recto. Hebes est, qui maior est recto.

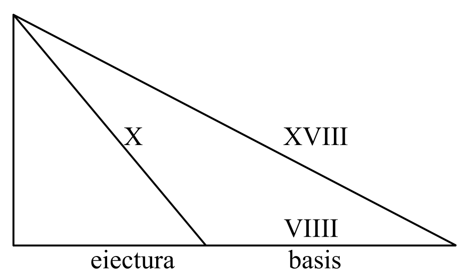
Es gibt drei Arten messbarer Größen: Strecke, Fläche und Körper. Eine Strecke ist eine Größe, von der wir nur die Länge messen. Eine Fläche ist eine Größe, von der wir Länge und Breite messen. Ein Körper ist eine Größe, von der wir Länge, Breite und Höhe messen.

Es gibt drei Arten von Winkeln: den rechten, den spitzen und den stumpfen. Ein rechter Winkel ist der, der normal gezeichnet ist. Der spitze Winkel ist kleiner als der rechte. Der stumpfe Winkel ist größer als der rechte.

In amblygonio datis tribus lineis dicere eiecturam, super quam perpendicularis cadet.
Sic quaeramus. Sit amblygonium, cuius maior hypotenusa est ped. XVIII, basis eiusdem amblygonii ped. VIIII, hypotenusa minor ped. X. Dicere eiecturam eiusdem amblygonii, super quam perpendicularis cadet.
Sic quaeramus. Maiore hypotenusa in se multiplicata, ex ea summa deduces duos minores numeros singulos in se multiplicatos. Quod superfuerit, sumes partem dimidiam, partior ad basim: erit eiectura, super quam perpendicularis cadet.
Perpendicularem si volueris, hypotenusa minore multiplicata in se tolles eiecturam in se multiplicatam; reliqui, quod superfuerit, sumes latus; erit numerus perpendicularis.

In einem stumpfwinkeligen Dreieck, dessen drei Seiten gegeben sind, ist die Länge der Strecke zu berechnen, über der sich die Höhe erhebt.
Wir rechnen so: Gegeben sei ein Dreieck, von dem die längere Hypotenuse 18 Fuß misst, die Grundlinie 9 Fuß und die kürzere Hypotenuse 10 Fuß. Zu berechnen ist die Länge der Strecke, über der sich die Höhe erhebt.

Wir rechnen weiters: Nachdem die Maßzahl der längeren Hypotenuse mit sich multipliziert wurde, subtrahierst du von diesem Ergebnis die jeweils miteinander multiplizierten Maßzahlen der beiden anderen Seiten. Vom Rest bildest du die Hälfte und dividierst sie durch die Maßzahl der Grundlinie: Das Ergebnis wird die Länge der Strecke sein, über der sich die Höhe erhebt.
Wenn du die Länge der Höhe berechnen willst, multiplizierst du die Maßzahl der kürzeren Hypotenuse mit sich und subtrahierst davon die mit sich multiplizierte Maßzahl der vorhin berechneten Strecke. Von dem, was übrig bleibt, berechnest du die Wurzel; das wird die Länge der Höhe sein.

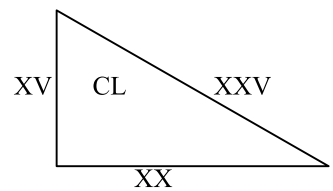


In trigono orthogonio, cuius hypotenusae podismus est ped. XXV, embadum ped. CL, dicere cathetum et basim separatim.
Sic quaeramus. Semper multiplico hypotenusam in se, fit DCXXV, ad hanc summam adicio IIII embada, quae faciunt ped. DC, utrumque in unum, fiunt ped.

In einem rechtwinkeligen Dreieck, dessen Hypotenuse 25 Fuß lang ist und dessen Fläche 150 Quadratfuß misst, sind die Maßzahlen der Kathete und der Grundlinie zu berechnen.
Wir rechnen, wie folgt. Ich multipliziere die Maßzahl der Hypotenuse mit sich, macht 625, addiere zu diesem Ergebnis das vierfache Maß der Fläche, 600, ergibt 1225

MCCXXV, huius sumo latus, quod fit XXXV. Deinde ut interstitio duarum rectarum inveniatur,.faciam hypotenusae numerum in se, fit DCXXV, hinc tollo IIII embada, fiunt ped. XXV. Huius sumo latus, fit V, erit interstitio; hoc semper adicio ad duas iunctas, id est ad XXXV, fiunt ped. XL. Huius sumo semper partem dimidiam, fit ped. XX: erit basis trigoni. Si tollo de XX interstitionem, id est ped. V, reliqui sunt ped. XV: erit cathetus eiusdem trigoni.

und berechne die Wurzel, macht 35. Um den Unterschied der Maßzahlen der beiden rechtwinkelig aufeinanderstehenden Seiten herauszufinden, multipliziere ich die Maßzahl der Hypotenuse mit sich, macht 625, subtrahiere von diesem Ergebnis das vierfache Maß der Fläche, ergibt 25. Davon berechne ich die Wurzel, macht 5, was gleich dem Unterschied der beiden Maßzahlen ist; das addiere ich zur Summe der Maßzahlen beider Seiten, das heißt zu 35, macht 40 Fuß. Davon bilde ich die Hälfte, 20 Fuß, was der Maßzahl der Grundseite des Dreiecks entspricht. Ziehe ich von 20 Fuß die Differenz, das heißt 5 Fuß ab, so bleiben 15 Fuß übrig. So lang ist die Kathete des Dreiecks.

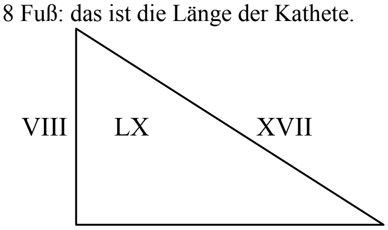


Si datum fuerit trigonum orthogonium et dati fuerint cathetus et basis in se ped. XXIII, embadum huius trigoni ped. LX et hypotenusa ped. XVII, dicere cathetum et basim separatim.

Sic quaeramus. Facio hypotenusae numerum in se, fit CCLXXXVIIII, hinc tollo IIII embada, quod fit CCXL, reliquum XLVIIII. Huius semper sumo latus, fit VII; hoc semper adicio ad duas iunctas, id est ad XXIII, fiunt ped. XXX; huius semper sumo dimidiam, fit XV: erit basis eiusdem trigoni. De duabus iunctis, id est de XXIII, tollo ped. XV, reliqui ped. VIII: erit cathetus.

Gegeben ist ein rechtwinkeliges Dreieck, die Summe der Maßzahlen von Kathete und Basis, 23 Fuß, die Fläche des Dreiecks, 60 Quadratfuß, und die Maßzahl der Hypotenuse, 17 Fuß. Zu berechnen sind die Maßzahlen der Kathete und der Basis.

Wir rechnen so. Ich multipliziere die Maßzahl der Hypotenuse mit sich, macht 289, subtrahiere davon die vierfache Fläche, das heißt 240, der Rest beträgt 49. Davon berechne ich die Wurzel, macht 7; dieses Ergebnis addiere ich zur gegebenen Summe der Maßzahlen von Kathete und Basis, also zu 23, macht 30. Davon berechne ich die Hälfte, macht 15: das ist die Maßzahl der Basis des Dreiecks. Von der Summe, das heißt von 23, subtrahiere ich 15 Fuß, übrig bleiben 8 Fuß: das ist die Länge der Kathete.



Si datum fuerit trigonum oxygonium, cuius tres numeri dati sint, minus latus eius ped. XIII, basis ped. XIIII, maius latus ped. XV, dicere perpendicularem eiusdem oxygoni et praecisuras singulas.

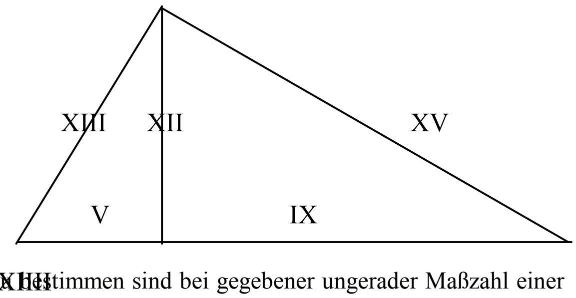
Sic quaeramus. Semper facio XIII in se, fit CLXVIIII, et XIIII in se, fit CXCVI, utrumque in unum, fit CCCLXV; ex hac summa semper tollo XV in se, fit CCXXV; hoc tollo de CCCLXV, reliquum CXL. Huius semper sumo partem dimidiam, fit LXX, hoc partior ad basim, id est ad XIIII, et fit V: erit minor praecisura eiusdem oxygoni, quam de basi, id est XIIII, tollo, fit IX: erit maior praecisura.

Gegeben sind die drei Seiten eines spitzwinkeligen Dreiecks, die kleinere Seite misst 13 Fuß, die Grundlinie 14 Fuß, die größere Seite 15 Fuß. Zu berechnen sind die Maßzahlen der Höhe sowie der Teilstrecken, in die die Grundlinie durch die Höhe geteilt wird.

Wir rechnen, wie folgt. Ich multipliziere 13 mit sich, macht 169, und 14 mit sich, macht 196, und addiere die beiden Ergebnisse, macht 365: von diesem Ergebnis subtrahiere ich die mit sich multiplizierte Maßzahl 15, das heißt 225, übrig bleibt 140. Davon bilde ich die Hälfte, macht 70, und dividiere sie durch die Maßzahl der Basis, das heißt durch 14; das Ergebnis ist 5: so lang ist die kürzere der beiden Teilstrecken der Basis. Wenn ich diese Zahl von der Maßzahl der Basis, das heißt von 14, subtrahiere, ergibt sich 9, die Maßzahl der längeren der beiden Teilstrecken.

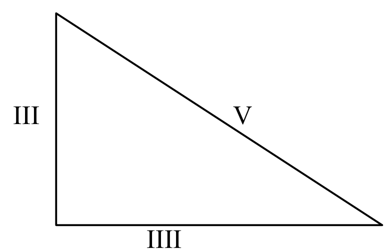
Perpendicularem dicere.
Sic quaeramus. De hypotenusa minore, id est de XIII in se, tollo minorem praecisuram in se, id est V in se; quod superest, latus: erit perpendicularis.

Zu berechnen ist noch die Höhe.
Wir rechnen so. Von der mit sich selbst multiplizierten Maßzahl 13 der kleineren Seite subtrahiere ich die mit sich multiplizierte Maßzahl 5 der kürzeren Teilstrecke. Von dem, was übrig bleibt, berechne ich die Wurzel. Das Ergebnis ist die Maßzahl der Höhe.



Dato impari numero trigonum orthogonium instituere; datus numerus sit tres.
Sic quaeramus. Datum numerum, id est III, in se, fit VIIII; hinc semper tollo assem, fit VIII; huius sumo semper partem dimidiam, fit IIII: erit basis; ad basim adicio assem: erit hypotenusa ped. V.
Item pari numero trigonum orthogonium instituere; ut puta: sit par numerus VI.
Sic quaeramus. Semper huius sumo partem dimidiam, fit III; hoc in se, fit VIIII; hinc semper tollo unum, et fit VIII: erit basis trigoni.

Zu bestimmen sind bei gegebener ungerader Maßzahl einer Seite die Maßzahlen der anderen Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks. Die Maßzahl einer Seite ist mit 3 gegeben.
Wir rechnen, wie folgt. Ich multipliziere die gegebene Maßzahl, das heißt 3, mit sich, ergibt 9; davon subtrahiere ich 1, macht 8; davon nehme ich die Hälfte, macht 4: das ist die Maßzahl der Basis. Zur Maßzahl der Basis addiere ich 1: die Hypotenuse misst 5 Fuß.
Ebenso sind bei gerader Maßzahl einer Seite die Maßzahlen der anderen Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks zu berechnen; die gegebene gerade Maßzahl ist zum Beispiel 6.
Wir rechnen, wie folgt. Ich nehme von 6 die Hälfte, macht 3, und multipliziere dieses Ergebnis mit sich selbst, macht 9; davon subtrahiere ich 1, macht 8: das ist die Maßzahl der Basis des Dreiecks.

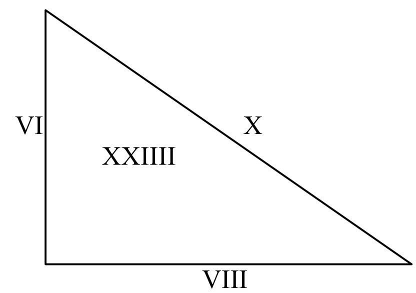


Omnem trigonum una ratione podismare, ut puta: orthogonium, oxygonium et amblygonium.
Sic quaeramus. Cuiuslibet ex tribus triangulis tres numeros iungo in unum.
Sit orthogonium, cuius numeri dantur: cathetus ped. VI, basis ped. VIII, hypotenusa ped. X. Hos tres numeros iungo, et fiunt XXIIII; huius semper sumo dimidiam, fit XII. Hoc sepono et ex hoc numero, id est de XII, tollo singulos numeros. Cathetum ped. VI tollo de XII, reliquum pono sub XII; item basim ped. VIII tollo de XII, reliquum pono sub VI; hypotenusam ped. X tollo de XII, reliquum II pono sub IIII. Deinde multiplico VI per IIII, fit XXIIII; hoc duco II, fit XLVIII; hoc duco per XII, fit

Zu berechnen ist die Fläche jedes Dreiecks, ob rechtwinkelig, spitzwinkelig oder stumpfwinkelig, nach einer einzigen Formel.
Wir rechnen so. Ich addiere die Maßzahlen der drei Dreieckseiten.
Gegeben sei ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Seitenlängen: Kathete 6 Fuß, Grundlinie 8 Fuß, Hypotenuse 10 Fuß. Ich addiere die Maßzahlen der drei Seiten, macht 24. Davon nehme ich die Hälfte, macht 12. Diese Zahl stelle ich beiseite und subtrahiere von ihr, das heißt von 12, die Maßzahl jeder einzelnen Seite. Die 6 Fuß der Kathete subtrahiere ich von 12, den Rest setze ich unter 12; ebenso subtrahiere ich die 8 Fuß der Basis von 12; den Rest setze ich unter 6; die 10 Fuß der Hypotenuse subtrahiere ich von 12, den Rest 2 setze ich unter 4. Dann multipliziere ich 6 mit 4, macht 24, dies multipliziere ich mit 2, macht 48; diese Zahl multipliziere ich mit 12, ergibt

DLXXVI; huius sumo latus, et fiat XXIIII: erit embadum.

576; davon berechne ich die Wurzel, ergibt 24: so viel misst die Fläche.



Et cetera trigona eadem ratione podismabuntur.

Si datum fuerit trigonum orthogonium et dati fuerint omnes numeri eius, a recto angulo missa super hypotenusam perpendicularis et singulae praecisurae desiderabuntur.
Sic quaeramus. Ut puta trigonum orthogonium et cathetus sint ped. VIII, basis ped. X, hypotenusa ped. XII. Semper multiplico cathetum per basim, fit LXXX; effectum partior ad hypotenusam, fit VI: erit perpendicularis.
Ut quaeramus singulas praecisuras ...
(*cetera desunt*)

Auch die Flächen der übrigen Dreiecke werden mit derselben Methode berechnet.
Gegeben ist ein rechtwinkeliges Dreieck und die Maßzahlen aller Seiten. Die Maßzahl der vom rechten Winkel auf die Hypotenuse gezeichneten Höhe und die der beiden Hypotenusenabschnitte sind zu berechnen.
Wir rechnen so. Gegeben ist zum Beispiel das rechtwinkelige Dreieck, dessen Kathete 8 Fuß, dessen Grundlinie 10 Fuß und dessen Hypotenuse 12 Fuß messen. Ich multipliziere die Maßzahl der Kathete mit der der Basis, macht 80; das Ergebnis teile ich durch die Maßzehl der Hypotenuse, macht 6: so groß ist die Maßzahl der Höhe.
Um die einzelnen Hypotenusenabschnitte zu berechnen ... (*hier bricht der Text ab*.

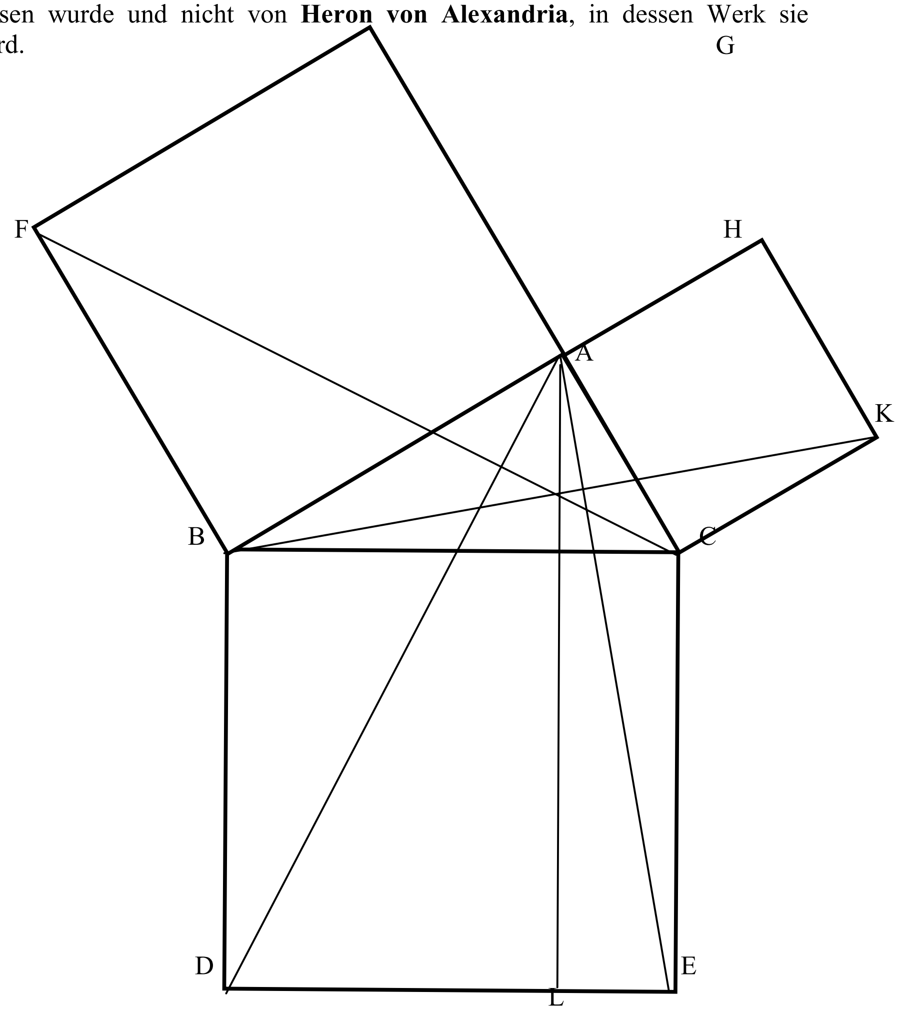
Ausgewählte antike Beweismethoden

In keinem Bereich zeigt sich das unterschiedliche mathematische Verständnis der Griechen und Römer deutlicher als beim Beweisen von Lehrsätzen. Wir finden in der gesamten lateinisch geschriebenen mathematischen Fachliteratur der Spätantike und des frühen Mittelalters nirgendwo den Ansatz eines mathematischen Beweises. Während in der griechischen Fachliteratur das klassische Lehrschema: Definition – Satz – Beweis seit **Euklid** selbstverständlich ist, ist – so scheint es – für den Römer der Beweis einer mathematischen Aussage überflüssig. Für ihn zählt nur praktische Verwertbarkeit, strenge Wissenschaftlichkeit entspricht nicht seinem Selbstverständnis. Dies lässt sich besonders anschaulich an den Euklidübersetzungen des **Boethius** und seiner Epigonen zeigen. In diesen Schriften werden zwar die Definitionen, Axiome und Postulate, sowie die Sätze der Bücher I – IV der *Elemente* **Euklids** ins Lateinische übertragen, die Beweise allerdings nicht.
Um zu verstehen, wie die antike Mathematik an die Lösung von Problemen heranging, ist es notwendig sich exemplarisch mit einigen antiken Beweismethoden auseinanderzusetzen. Wir finden bereits bei **Euklid** Beispiele für den direkten und den indirekten Beweis, wir entdecken in seinem Werk einen weit entwickelten Formalismus in der mathematischen Fachsprache, wir sehen aber auch, dass gelegentlich Schlussfolgerungen gezogen werden, die unserem logischen Empfinden fremd sind. Allgemein ist festzustellen, dass der antike Mensch ein viel ganzheitlicheres naturwissenschaftliches Denken entwickelt hatte als der heutige Wissenschaftler. Die Grenzen zwischen Mathematik, Geometrie, Physik und Musik waren für ihn fließend. **Archimedes** verwendete


Sitzender Pythagoras. Hellenist. Münze um 230 n.Chr. Britisches Museum. London.

etwa physikalische Erkenntnisse zum Beweis mathematischer Lehrsätze, und der erste Beweis des berühmten ***pythagoreischen Lehrsatzes*** erfolgte vielleicht ganz „handgreiflich“ durch Vergleichen kongruenter Teilfiguren.
Im Folgenden sind die Beweise zweier klassischer geometrischer Sätze im Originalwortlaut ausgeführt, und zwar der Beweis des ***pythagoreischen Lehrsatzes***, wie er am Ende des ersten Buches der *Elemente* **Euklids** steht, und der Beweis der sogenannten ***Heronischen Flächenformel***, von der manche Forscher vermuten, dass sie in Wirklichkeit von **Archimedes** aufgestellt und bewiesen wurde und nicht von **Heron von Alexandria**, in dessen Werk sie allerdings erstmals schriftlich erwähnt wird.

Euklid**: *elementa* I, 47.**



Am rechtwinkeligen Dreieck ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den Quadraten über den den rechten Winkel umfassenden Seiten zusammen gleich.

ABC sei ein rechtwinkeliges Dreieck mit dem rechten Winkel BAC. Ich behaupte, dass

$$BC^2 = BA^2 + AC^2.$$

Man zeichne nämlich über BC das Quadrat BDEC und über BA, AC die Quadrate GB, HC; ferner ziehe man durch A AL // BD oder CE und ziehe AD, FC.
Da hier die Winkel BAC, BAG beide Rechte sind, so bilden an der geraden Linie BA im Punkte A auf ihr die zwei nicht auf derselben Seite liegenden geraden Linien AC, AG Nebenwinkel, die zusammen = 2R sind; also setzt CA AG gerade fort. (I, 14)[1]*. Aus demselben Grunde setzt auch BA AH gerade fort. Ferner ist ∠ DBC = ∠ FBA; denn beide sind Rechte. (Post. 4)*[2] *; daher füge man ∠ ABC beiderseits hinzu; dann ist der ganze Winkel DBA dem ganzen FBC gleich (Ax. 2)*[3]*. Da ferner DB = BC und FB = BA (I Def. 22)*[4]*, so sind zwei Seiten DB, BA zwei Seiten FB, BC entsprechend gleich; und ∠ DBA = ∠ FBC; also ist die gerade Linie AD = gerade Linie FC und Dreieck ABD = Dreieck FBC (I, 4)*[5]*. Ferner ist das Rechteck BL = 2.Dreieck ABD; denn sie haben dieselbe Grundlinie BD und liegen zwischen denselben Parallelen BD, AL (I, 41)*[6]*; auch ist das Quadrat GB = 2.Dreieck FBC; denn sie haben wieder dieselbe Grundlinie, nämlich FB, und liegen zwischen denselben Parallelen FB, GC. Von Gleichem die Doppelten sind aber einander gleich (Ax. 5)*[7]*. Also ist das Rechteck BL = Quadrat GB. Ähnlich lässt sich, wenn man AE, BK zieht, zeigen, dass auch Rechteck CL = Quadrat HC; also ist das ganze Quadrat BDEC den zwei Quadraten GB + HC gleich (Ax. 2). Dabei ist das Quadrat BDEC über BC gezeichnet und GB; HC über BA, AC. Also ist das Quadrat über der Seite BC den Quadraten über den Seiten BA, AC zusammen gleich.*

---

[1] I, 14 : Bilden an einer geraden Linie in einem Punkte auf ihr zwei nicht auf derselben Seite liegende gerade Linien Nebenwinkel, die zusammen zwei Rechten gleich sind, dann müssen diese Linien einander gerade fortsetzen.

[2] Post. 4: Gefordert soll sein, dass alle rechten Winkel einander gleich sind.

[3] Ax. 2: Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.

[4] Def.I, 22: Von den vierseitigen Figuren ist ein Quadrat jede, die gleichseitig und rechtwinkelig ist.

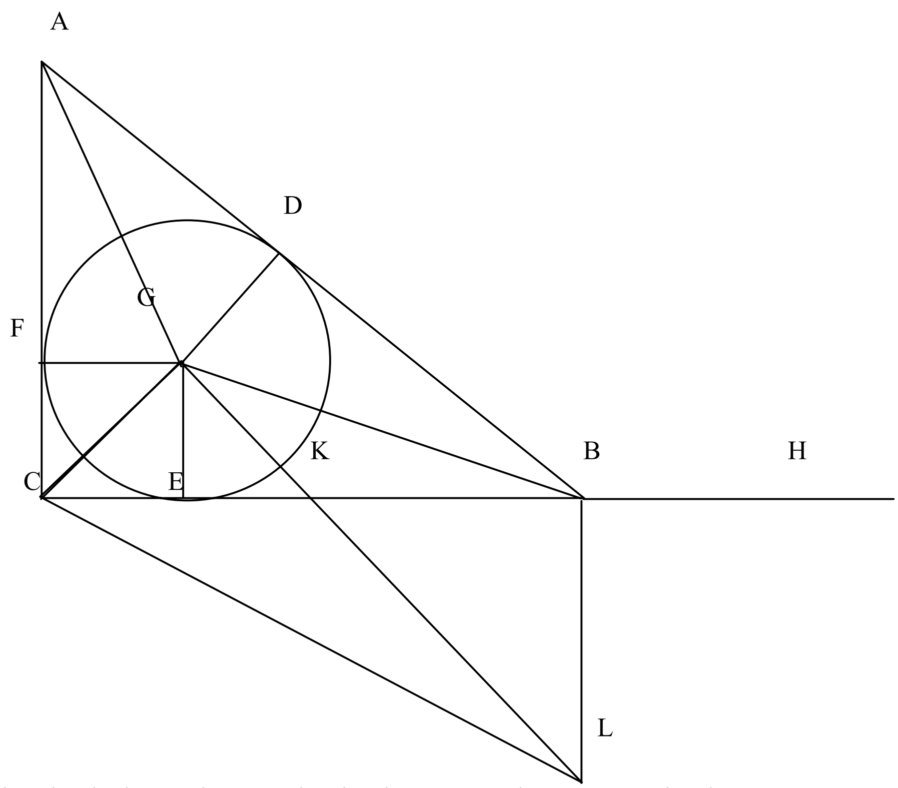
[5] I, 4: Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und die von den gleichen Strecken umfassten Winkel einander gleich, dann muss in ihnen auch die Grundlinie der Grundlinie gleich sein, das Dreieck muss dem Dreieck

gleich sein, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein; nämlich immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen.

[6] I, 41: Wenn ein Parallelogramm mit einem Dreieck dieselbe Grundlinie hat und zwischen denselben Parallelen liegt, ist das Parallelogramm doppelt so groß wie das Dreieck.

[7] Ax. 5: Die Doppelten von denselben sind einander gleich.

Heron v. Alexandria: περὶ δίοπτρας c.30



Wenn die Seiten eines Dreiecks gegeben sind seinen Inhalt zu finden. Es ist nun möglich, wenn man eine Höhe gefällt und ihre Größe bestimmt hat, den Inhalt des Dreiecks zu finden. Die Aufgabe sei jedoch, ohne Zuhilfenahme der Höhe den Inhalt des Dreiecks zu bestimmen.

Das gegebene Dreieck sei ABC und es sei jede seiner Seiten gegeben. Zu finden seinen Inhalt. Es werde in das Dreieck der Kreis DEF einbeschrieben, dessen Mittelpunkt G sein soll, und die Verbindungslinien GA, GB, GC, GD, GE, GF gezogen. Also ist BC x GE = 2 x Dreieck BGC, AB x GD = 2 x Dreieck AGB und AG x GF = 2 x ACG. Mithin ist das Produkt aus dem Umfang des Dreiecks ABC und der Strecke GE, das heißt dem Radius des Kreises DFE, = 2 x Dreieck ABC [8]. Es werde nun CB verlängert und BH = AD gemacht. Dann ist HC gleich der Hälfte des Umfangs. Also HC x EG = Dreieck ABC. Aber HC x EG = $\sqrt{HC^2 \times EG^2}$; also ist $\sqrt{HC^2 \times EG^2}$ = dem Inhalt des Dreiecks. Man ziehe GL im rechten Winkel zu GC, BL im rechten Winkel zu BC, und verbinde die Punkte C und L durch eine Gerade. Da nun jeder der beiden Winkel $\angle$ CGL und $\angle$ CBL ein rechter ist, so liegen C, G, B, L auf einem Kreis [9]. Also ist die Summe der Winkel $\angle$ CGB und $\angle$ CLB = 2 Rechten[10] und weil die Winkel bei G durch die Geraden AG, BG, CG halbiert werden, so ist Winkel $\angle AGD = \angle CLB$ [11]. Also ist das Dreieck AGD dem Dreieck CBL ähnlich [12].

Mithin: CB : BL = AD : DG = HB : GE und CB : BH = BL : GE = BK : KE und CH : HB = BE : EK [13].

Daher auch $CH^2 : CH \times HB = BE \times EC : CE \times EK$ [14] $= BE \times EC : GE^2$. [14]

Daher wird das Produkt aus dem Quadrat von CH und dem Quadrat von EG, aus dem die Wurzel gleich dem Dreieck war, gleich CH ✕ HB ✕ CE ✕ EB sein. Und jede der Geraden CH, HB, BE und EC wird gegeben sein. Denn CH ist gleich der Hälfte des Umfangs, HB gleich der Differenz des halben Umfangs und der Geraden BC; BE ist gleich der Differenz des halben Umfangs und der Geraden AC; CE ist gleich der Differenz des halben Umfangs und der Geraden AB. Also ist der Inhalt des Dreiecks gegeben.

Berechnet wird es folgendermaßen. Es sei AB = 13, BC = 14, CA = 15.

$$13 + 14 + 15 = 42$$
$$\tfrac{1}{2} \times 42 = 21$$
$$21 - 13 = 8 \quad 21 - 14 = 7 \quad 21 - 15 = 6$$
$$21 \times 8 \times 7 \times 6 = 7056$$
$$\sqrt{7056} = 84.$$

Der Inhalt des Dreiecks ist = 84.

---

[8] Die Formel $A_{Dreieck} = \tfrac{1}{2} \cdot U_{Dreieck} \cdot \rho$ wird von **Heron** öfters verwendet und auch bewiesen (*liber geeponicus* c. 53 ed. Hultsch S. 213)

[9] Die Formulierung und der Beweis des Satzes *Alle Winkel im Halbkreis sind rechte Winkel* wird **Thales von Milet** zugeschrieben (**Diogenes Laertius** I, 24). **Euklid** gibt zwei Beweise dieses Satzes an (III, 31), wobei er in der ersteren (und wahrscheinlich thaletischen) Beweisvariante nur die Gleichheit der Basiswinkel eines gleichschenkeligen Dreiecks und die

Größe der Winkelsumme im Dreieck als bekannt voraussetzt.

10 Der Satz *Die Summe zweier gegenüberliegender Winkel eines Sehnenvierecks ist gleich zwei Rechten* findet sich samt Beweis erstmals bei **Euklid** (III, 22).

11 Aus der Winkelsumme im Dreieck folgt $\angle$ CLB = ½ *x* $\angle$ CBA + ½ *x* $\angle$ ACB = Rechter Winkel – ½ *x* $\angle$ BAC = $\angle$ AGD.

12 Euklid: Def. IV, 1 : *Ähnliche geradlinige Figuren sind solche, die einzeln verglichen gleiche Winkel und an diesen gleichen Winkeln proportionale Seiten haben*.

13 Nach dem dritten Ähnlichkeitssatz (**Euklid** VI, 6) folgt aus:
CB : BH = BK : KE die Proportion
CB + BH : BH = BK + KE : KE, das heißt
CH : BH = BE : EK

14 Der Satz *Im rechtwinkeligen Dreieck ist das Höhenquadrat gleich dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten* steht ebenfalls bei **Euklid** (II,14)

Pinturicchio: ARIDMETRICA. Lünettenfresko in der Sala delle Arti Liberali des Appartamento Borgia (1492/95). Vatikanische Museen. Rom. Die Gestalt der Arithmetik thront unter einem Baldachin in einer frei erfundenen Landschaft. Sie hält Zirkel und pythagoreische Tafel in den Händen. Zu ihren Füßen haben sich die großen Gelehrten der Disziplin eingefunden. In der Gestalt vor dem Thron glaubt man Pythagoras erkennen zu können.

Verzeichnis der Originaltexte

Bibliographie

Primärliteratur:

Euklid: Die Elemente. Hrsg. u übs.v.Clemens Thaer. Bd.1–13 Darmstadt 1969

Diophant von Alexandria: opera omnia. Ed. P. Tannery. Bd.1, 2. Leipzig 1893–1895

Heron von Alexandria: opera omnia. Ed. W. Schmidt. Bd.1–5. Leipzig 1899–1914

Die Schriften der römischen Feldmesser. Ed. F. Blume, K. Lachmann. Bd. 1, 2. Berlin 1848–1852

Gerberti opera mathematica. Ed. N. Bubnov. Berlin 1899

Valerius Maximus: facta et dicta memorabilia. Ed. C. Klempf. Leipzig 1854

Sex. Iulius Frontinus: de aquis. Ed. F. Buecheler. Leipzig 1858

Boethius: de institutione arithmetica libri duo. De institutione musica libri quinque, accedit geometria quae fertur Boetii. Ed. G. Friedlein. Leipzig 1867

Victorii calculus ex codice Vaticano. Ed. G. Friedlein. Rom 1871

Beda venerabilis. Opera. Ed. Ch. W. Jones. Cambridge 1943

Folkerts Menso: Pseudo-Beda: De arithmeticis propositionibus. Eine mathematische Schrift aus der Karolingerzeit. Sudhoffs Archiv 56 (1971) 1, 58–75

Die älteste mathematische Aufgabensammlung in lat. Sprache: Die Alkuin zugeschriebenen Propositiones ad acuendos iuvenes. Wien 1977

Sekundärliteratur:

Tropfke J.: Geschichte der Elementarmathematik. Bd. 1. Arithmetik u. Algebra. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich, Helmuth Gericke. Berlin 1980.
Bd.2–5. Leipzig 1903

Gericke H.: Mathematik in Antike und Orient. Mathematik im Abendland. Wiesbaden 1996

Meschkowski H. Problemgeschichte der Mathematik. Bd. 1: Die Entwicklung der mathematischen Fragestellungen von den Anfängen bis ins ausgehende Mittelalter. Berlin 1979

Friedlein G.: Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer des christlichen Abendlandes. Erlangen 1869

Cantor M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig 1880. Bd. 1: Von den ältesten Zeiten bis 1200 n.Chr.

Dilke O. A. W. : Mathematik. Maße und Gewichte in der Antike. Reclam. Stuttgart 1991

Rieche A.: Computatio Romana. Fingerzählen auf provinzialrömischen Reliefs in: Bonner Jahrbücher 186 (1986) 165 ff.

Beauclair W.de: Rechnen mit Maschinen. Braunschweig 1968