

## Anleitung zu Geogebra

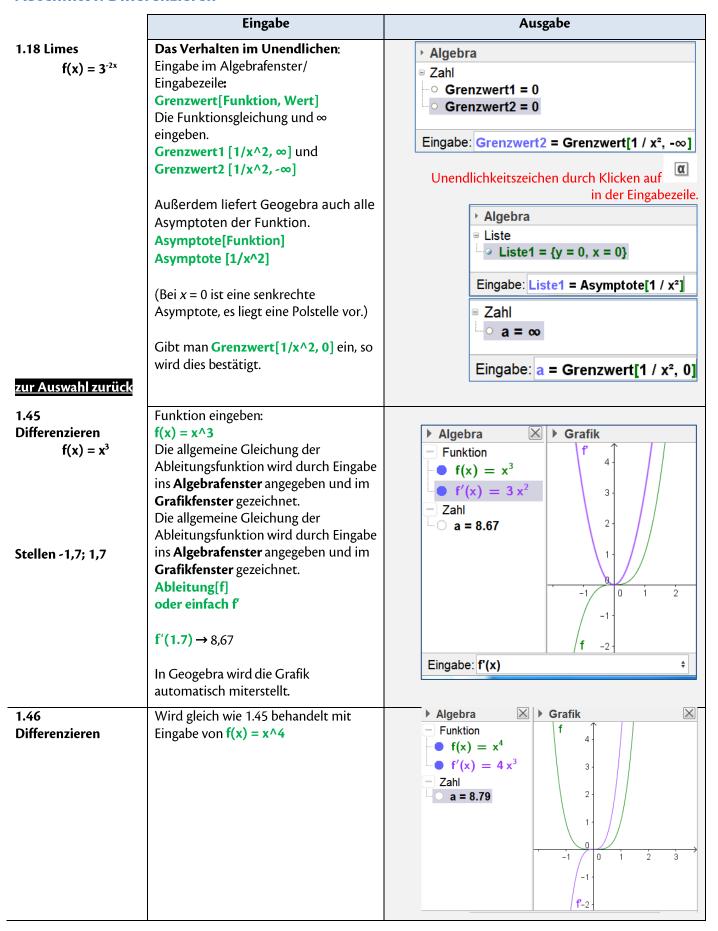
HPT- SBplus zu Kompetenz: Mathematik HAK4
Brigitte Wessenberg

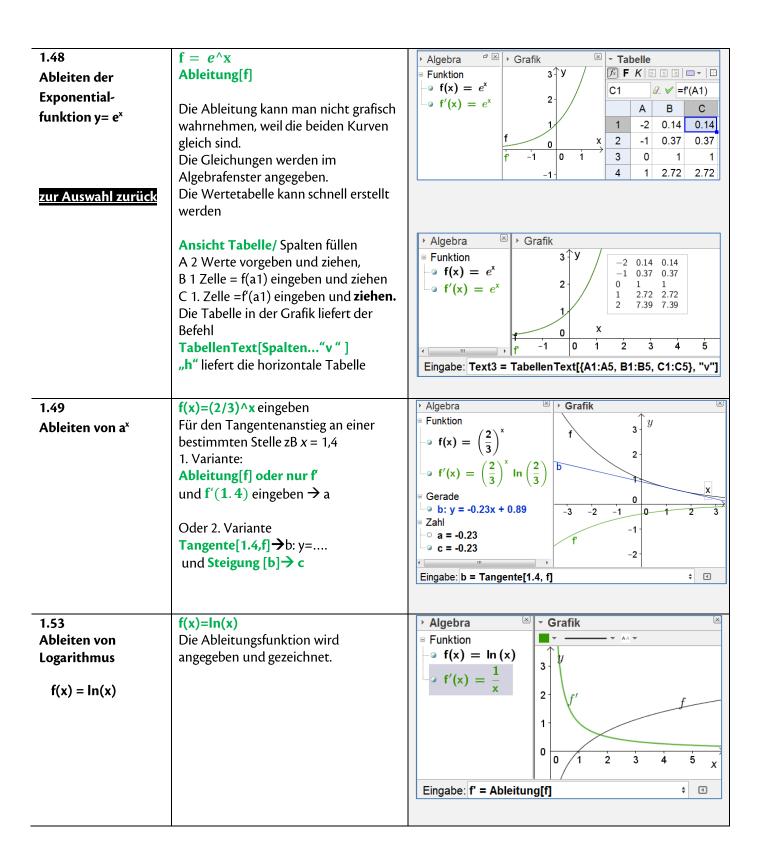
### Inhalt

1. Differenzieren	Technologieeinsatz (nach Aufgabennummer) <a href="https://doi.org/1.18-limes">1.18 Limes</a>	Seite 2
	1.45 Differenzieren	2
	1.46 Differenzieren	2
	1.48 Ableiten der Exponentialfunktion	3
	1.49 Ableiten der Exponentialfunktion mit bel. Basis	3
	1.53 Ableiten des natürlichen Logarithmus	3
	1.94 Kurvenuntersuchung	4
2. Regression	2.1 lin. Regression	5
	2.2.2 nichtlineare Regression	5
3. Kosten- Preistheorie	Siehe Kurvenuntersuchung. Max, Min; Wendepunkte	
4. Integrieren	4.25 Integral	6
	4.44 Bestimmtes Integral	6
	4.45 46 Flächenberechnung	7
	4.53 Fläche f-g	7
5. Beschreibende Statistik	5.6. Tabellen und Graphen	8
	5.10 Klasseneinteilung	9
	5.20 Statistik-Befehle	9
	5.20 Lagemaße	10
	5.20/21 Gewichtete Größen	10
	5.32 Streuungsmaße	11
	5.3 2-Variablenstatistik	11
	5.36 Regression und Korrelation	12

In der vorliegenden Anleitung sind nur jene Funktionen des Rechners angesprochen, die im Lehrbuch "Kompetenz: Mathematik HAK4" zu den angeführten Aufgaben empfohlen werden.

#### **Abschnitt1: Differenzieren**





#### 1.94 Kurvenuntersuchung f (x) = x<sup>3</sup> - 6x<sup>2</sup> + 9x + 1

#### Grafisches Verfahren

Die Funktionsgleichung in die Eingabezeile zB

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

#### Tipp:

Man muss f(x) = nicht unbedingt mit eingeben, es genügt der Funktionsterm, f(x) wird automatisch dazugeschrieben. Aber Achtung: bei linearen Funktionen NICHT nur den Term nehmen. In diesem Fall wird die Gerade als Objekt verstanden. Die Untersuchung wird dann schwieriger.

Algebra - Grafik Funktion  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6x^2 + 9x + 6x^2 + 9x + 6x^2 +$ f(x)Gerade 8 t: y = -3x + 9 6 Punkt • H = (1, 5)  $\sim$  N = (-0.1, 0) → T = (3, 1) W = (2, 3) Zahl Eingabe: N = Nullstellen[f, -1, 4] α ‡ 4

zur Auswahl zurück

Den Graph im Grafikfenster justieren und formatieren. Befehle: Nullstellen [f, Startwert, Endwert] Max[f, Startwert, Endwert] Min[f, Startwert, Endwert] Wendepunkt [f] Tangente[Punkt,f] Steigung [Punkt,f]

#### **Rechnerisches Verfahren mit CAS:**

f1(x) im Algebrafenster eingeben (definieren)

Die 1. Ableitung in der Gleichung eingeben und automatisch lösen... → Extrema

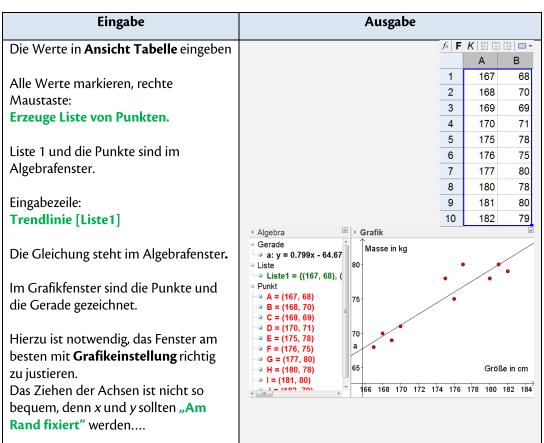
Die 2. Ableitung (Grad der Ableitung zusätzlich angeben!) → Wendepunkt Tangente mit *x*-Wert und Funktion.

**f1'(2)** gibt den Wert -3 ... Anstieg der Tangente bei x = 2

# CAS or Solve(Ableitung[f1(x), x]=0,x) $\Rightarrow \{x = 1, x = 3\}$ solve(Ableitung[f1(x), x, 2]=0,x) $\Rightarrow \{x = 2\}$ Tangente[2, f1(x)] $\Rightarrow y = -3 (x - 2) + 3$ 4 f1'(2) $\Rightarrow -3$ $\Rightarrow Algebra$ Funktion or f1(x) = $x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

#### **Abschnitt 2: Regression**

#### 2.1 lineare Regression



#### zur Auswahl zurück

#### 2.2.2 Nichtlineare Regression

Die Eingabe ist gleich wie bei der linearen Regression. Es stehen nun aber unterschiedliche Kurven zur Auswahl. Geogebra hat hier ein gutes Angebot!

Liste der Punkte erstellen

die folgenden Befehle sind verfügbar:

Trend[ <Liste von Punkten>, <Liste von Funktionen> ] rechnet bel. Trend, für Parameter Trend[ <Liste von Punkten>, <Funktion> ] Schieberegler verwenden...

TrendExp[ <Liste von Punkten> ] ...e kx

Trend Exp2[Liste von Punkten] ... abx

TrendImplizit[ <Liste von Punkten>, <Grad> ] implizite Kurve f(x,y) = 0

Trendlinie[ <Liste von Punkten> ] TrendlinieX[ <Liste von Punkten> ] ...Gerade

TrendLogistisch[ <Liste von Punkten> ] ...logistische Kurve

TrendPoly[ <Liste von Punkten>, <Grad des Polynoms> ] ...Polynome 2.3.4. Grades

TrendPot[ <Liste von Punkten> ] axb

TrendSin[ <Liste von Punkten> ] trigonometrische Funktionen

#### **Abschnitt 4: Integrieren**

#### 4.25 Integrieren

$$\int (x+1)^2 dx$$

## Eingabe:

#### Ausgabe:

#### CAS:

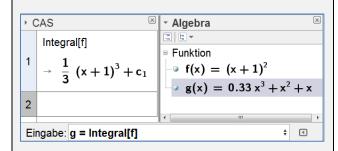
**f(x)** im Algebrafenster eingeben (definieren) CAS öffnen.

#### Algebrafenster:

Integral [f]

in Eingabezeile Integral [f] eingeben.

Vorsicht mit der Interpretation der Konstanten! In CAS und Algebra unterschiedliche Angaben!



#### 4.44 Bestimmtes Integral

$$\int_{1}^{2} \left(5\cdot 3^{x}+2\cdot\right) dx$$

#### CAS:

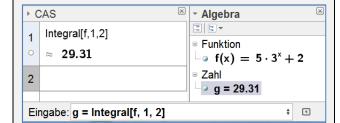
f(x) im Algebrafenster eingeben (definieren) CAS öffnen.

Integral [f, untere Grenze = Startwert; obere Grenze = Endwert]

nimm nicht Enter sondern den Button mit ≅

#### Algebrafenster:

in Eingabezeile Integral [f, untere Grenze = Startwert; obere Grenze = Endwert] eingeben.



#### 4.45/46 Flächen berechnen

f(x) = x

Grenzen -3, 0, 3

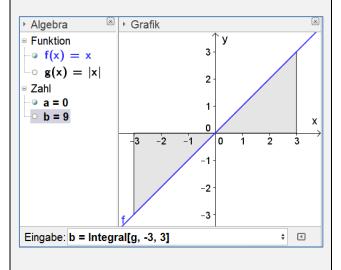
#### Algebra- und Grafikfenster

Für die Fläche müssen die Vorzeichen beachtet werden! Üblicher Weg daher: Nullstellen vorher bestimmen und schrittweise integrieren

#### TIPP:

Um das zu umgehen, kann man auch den Absolutbetrag der Funktion integrieren! Allerdings nur zusammen mit der Grafik!

- 1. Schritt, das ganze Integral mit unterem und oberem Grenzwert eingeben. Die Fläche wird schattiert, aber nicht richtig gerechnet! (a = 0) 2. Schritt: In Algebra abs(f(x)
- 2. Schritt: In Algebra abs(f(x)) eingeben. → g(x) Integral untere, obere Grenze. Die Fläche wird richtig berechnet. (b = 9)



#### CAS: ▶ CAS Einfache Eingabe bei Verwendung Integral[abs(f), -3, 3] 1 des Absolutbetrags der vordefinierten Funktion f. 4.46 Fläche Diese Fläche kann gleich behandelt Algebra werden wie 4.45 Funktion a 64 $f(x) = x^3 - 4x$ $f(x) = x^3 - 4x$ Hier wird nun die Teilung der a = -1, Gerade Flächen gezeigt. b = 2,5a: x = -1 Nullstellen berechnen b: x = 2.5 Dann die Integrale einzeln Punkt $\circ$ N1 = (-2, 0) eingeben. 1.27 c = 11.75 $\circ$ N2 = (0, 0) $\circ$ N3 = (2, 0) 0 Die Beträge werden addiert: ż Zahl 7,02 FE d = -4 c = 1.75 $\circ$ d = -4 -2 e = 1.27 4 Eingabe: d = Integral[f, 0, 2] zur Auswahl zurück Eine von den beiden gegebenen Funktionen ist eine horizontale Fläche zwischen 2 **Funktionen** Gerade. Die Vorgangsweise gilt aber auch für eine beliebige andere Funktion. $f_1(x) = x^2$ $f(x) = x^2$ $f_2(x) = 4$ g(x) = 4**▶ Algebra** Schnittpunkte bestimmen: Funktion Schneide [f,g] $\circ$ f(x) = x<sup>2</sup> Fläche berechnen: g(x) = 4IntegralZwischen Punkt [g,f, Startwert, Endwert] $\bullet$ A = (-2, 4) ● B = (2, 4) Zahl **Tipp:** Möchte man ein positives a = 10.67 Ergebnis für das Integral, so muss a = 10.67 die "oben" liegende Funktion zuerst angeführt werden! ( Umlaufsinn!) Oder man beachtet das Vorzeichen -3 -2 1 ż nicht. Oder man setzt vor das Integral **‡** 4 Eingabe: a = IntegralZwischen[g, f, -2, 2] abs (integral...

#### zur Auswahl zurück

4.53

Beachte, bei mehreren

integrieren...

Schnittpunkten haben die Flächen jeweils einen anderen Umlaufsinn und daher muss man hier von Schnittpunkt zu Schnittpunkt

#### **Abschnitt 5: Beschreibende Statistik**

5.6 Tabellen und Graphen

#### zur Auswahl zurück

## Eingabe

Ansicht Tabelle Urliste eingeben.

Liste erzeugen:

Spalte markieren, Rechtsklick/ erzeuge Liste → Liste 1

Will man die Liste zur Weiterverarbeitung kann man so vorgehen:

Algebrafenster:

Einzigartig [ Liste1] → Liste 2 gibt die Einzelwerte der Rohdaten Häufigkeit [Liste1] → Liste 3

#### Übertragen in die Tabelle:

Fülle Spalte [2,Liste2] und Fülle Spalte [3,Liste3]

Die relative und die kumulierte Häufigkeit kann man dann in der Tabelle weiter eingeben

zeichnen

#### Zum Zeichnen des

Balkendiagramms 2 Varianten:

1. Eingeben im Algebrafenster; Balkendiagramm[Liste Rohdaten; Balkenbreite, Vertikale Skalierung]

hier:

Balkendiagramm[Liste1;0.5;1]

Weiterverarbeiten nach Wunsch...

2. ohne Beschriftung kann man auch die schnelle Variante wählen:

Markieren der Spalte/ Tabellenansicht/ Analyse einer



Variablen

Balkendiagramm wählen. zur Weiterverarbeitung ins Grafikfenster mit Rechtsklick: in die Zeichenfläche kopieren...

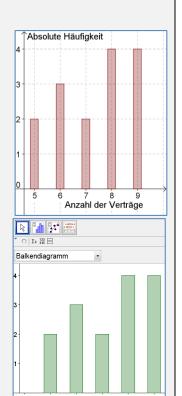
## Ausgabe

In die Eingabezeile: Häufigkeitstabelle[Liste Rohdaten, Skalierungsfaktor] hier [Liste1,1]

Häufigkeitstabelle erscheint im Grafikfenster:

Wert	Häufigkeit		
5	2		
6	3		
7	2		
8	4		
9	4		

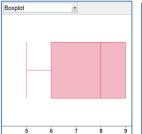
В	С	D	Е	F
Anz.	abs.H.	rel.H.	proz.H	kum.H.
5	2	0.13	13	2
6	3	0.2	20	5
7	2	0.13	13	7
8	4	0.27	27	11
9	4	0.27	27	15

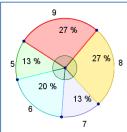


<u>zur Auswahl zurück</u>

#### weitere Diagrammarten

## Absolute Häufigkeit 4 3 2 1 0 5 6 Anzahl der Verträge





Noch nicht: Das Kreisdiagramm ist nicht integriert. Erstellen über Kreis- und Winkel. Winkel mit rel.H. mal 360

#### zur Auswahl zurück

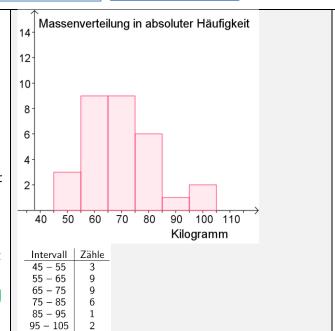
## 5.10 Klasseneinteilung

Urliste eingeben-> Liste 1
Klassen[Liste1; Anfangswert,
Klassenbreite] → Liste 2
hier [Liste1,45,10]

Histogramm [Liste2,Liste 1, false]

false bedeutet, dass das Histogramm nicht mit der Fläche sondern mit der Klassenhäufigkeit dargestellt wird.

**Die Häufigkeitstabelle** bekommt man ins Grafikfenster mit: **Häufigkeitstabelle[Liste2,Liste1]** 



#### 5.20 Statistik-Befehle

zur Auswahl zurück

- =SUMME(Liste) Addiert die Zahlen einer Liste
- =Zählewenn[ Bedingung, (Variable), Liste] Zählt alle Zahlen mit der gegebenen Bedingung
- =Wenn(Bedingung; Dann\_Wert; Sonst\_Wert)
- =Max(Liste...) Maximalwert der Daten einer Liste
- =Min(Liste...) Minimalwert der Daten einer Liste
- =Modalwert(Liste von Zahlen) Modalwert der Daten einer Liste
- =Median[Liste Rohdaten, (Liste Häufigkeit)]
- =Percentile[Liste von Zahlen;0,25]; =Percentile[Liste von Zahlen;0,75] = 1. und 3. Quartil oder bei Häufigkeiten besser:

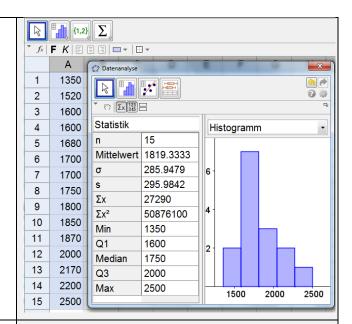
Q1[Liste von Zahlen, Liste von Häufigkeiten] bzw. Q1[Liste von Zahlen, Liste von Häufigkeiten]

- **=Mittelwert[Liste Rohdaten; (Liste Häufigkeiten)]** Arithmetisches Mittel der Daten der Liste ( mit Häufigkeiten)
- =GeometrischerMittelwert[Liste von Zahlen] Geometrisches Mittel der Daten einer Liste
- =Varianz[Liste von Rohdaten,(Liste von Häufigkeiten)] Grundgesamtheit, Varianz
- =Stichprobenvarianz[Liste von Rohdaten,(Liste von Häufigkeiten)] Stichprobenvarianz der Daten
- **=Standardabweichung [Liste der Rohdaten, (Liste der Häufigkeiten)]** Grundgesamtheit Standardabweichung
- =Stichprobenstandardabweichung [Liste der Rohdaten, (Liste der Häufigkeiten)]] Stichprobe, Standardabweichung

#### 5.20 Lagemaße

Die statistische Analyse wird zusammengefasst ausgegeben:

Urliste eingeben, markieren auf den Schaltknopf mit Stabdiagramm klicken. Analyse/ Summenzeichen



#### 5.21 Gewichtete Größen

Wird gleich behandelt wie Einzeldaten, nur muss die **Häufigkeitsliste** hinzugefügt werden.

#### zur Auswahl zurück

Markiere die 1.Spalte, Klicke auf das Diagrammsymbol, dort klicke im Dialogfeld auf das "Einstellungen"-Zeichen rechts oben.

Daten mit Häufigkeit aktivieren. Es wird eine Tabellenspalte mit Häufigkeit angelegt.

Markiere nun die 2. Spalte, klicke doppelt auf die Hand bei Häufigkeit, dann wird die Liste

Jetzt auf das **Summensymbol** gehen.

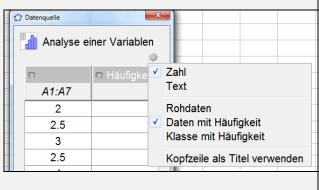
übertragen.

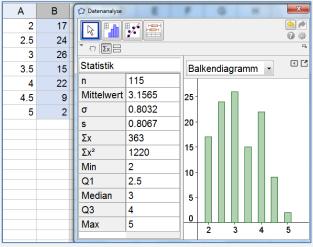
Boxplot zeichnen

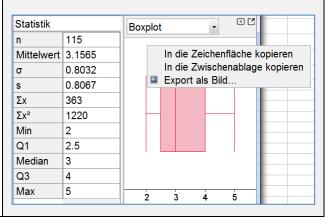
Im gleichen Fenster "Boxplot auswählen, zur Weiterbearbeitung Rechtsklick/in die Zeichenfläche kopieren.

Im Grafikfenster kann es beliebig beschriftet, gefärbt etc werden.

Kreisdiagramm bei Geogebra. Siehe S.9







#### 5.32 Streuungsmaße

Die Streuungsmaße kann man aus den statistischen Analysen herauslesen.

Tabellenspalten als Listen im Algebrafenster

Da auch der Boxplot schon genau erklärt wurde, berechnen wir hier nur die Standardabweichung und geben den IQR an.

Eingabezeile = Stichprobenstandardabweichung(Liste1,Liste2) →

s = 0,959 ... Stichprobe

Eingabezeile =Q3[Liste1,Liste2,3] - [Q1Liste1, Liste2,1]  $\rightarrow$  IQR = 1,5

## 5.32-Variablenstatistik

#### zur Auswahl zurück

Die Befehle **einzeln eingeben** alles markieren,

#### erzeuge Liste von Punkten.

Im Algebrafenster die statistischen Größen berechnen:

#### kov=KOVARIANZ[Liste1]

#### Vorsicht: Grundgesamtheit!

macht in diesem Fall nichts, weil auch die Standardabweichung bzw. Varianz in der Grundgesamtheit berechnet wird und daher für die Berechnung von *k* herausfällt. Benötigt man die Stichprobenwerte,

dann mal n/(n-1)!
mx= Mittelwert [A1:A9]

my=Mittelwert[B1:B9]

stabx = Standardabweichung X [Liste

1]

Vorsicht: Grundgesamtheit! benötigt man die

Standardabweichung der Stichprobe, dann mal

 $\frac{\sqrt{n}}{n}$ 

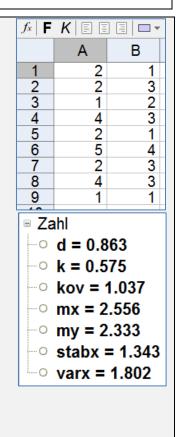
 $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ 

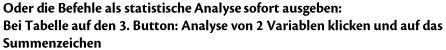
oder gleich:

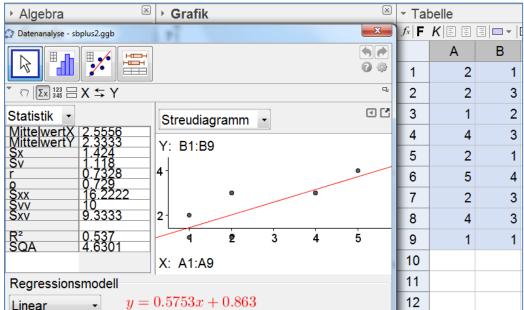
varx=Varianz[A1:A9] (= stabx²)

Vorsicht: Grundgesamtheit!

k = kov/varx d=my-k \*mx







5.31 Regression

Wir wählen aus der Tabelle die schnelle Analyse und lesen die Werte ab: r = -0.9829

Bei Tabelle auf den 3. Button: Analyse von 2 Variablen klicken und auf das Summenzeichen.

#### r... Pearson Koeffizient

 $\rho$  .... Spearman Koeffizient

Die Rangordnung muss daher nicht eigens bestimmt werden.

